



第八章

梯度折射率光线光学

8.1 引言

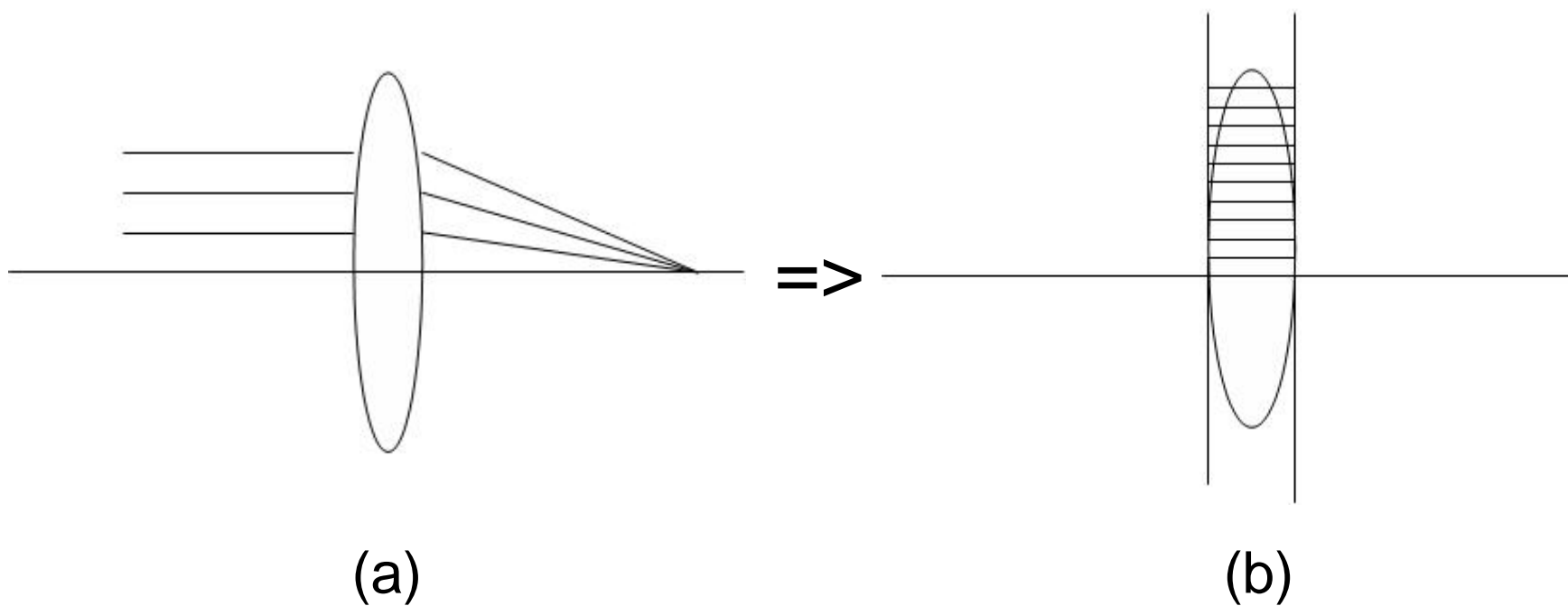


图8-1 单透镜与单透镜的等效

8.1 引言

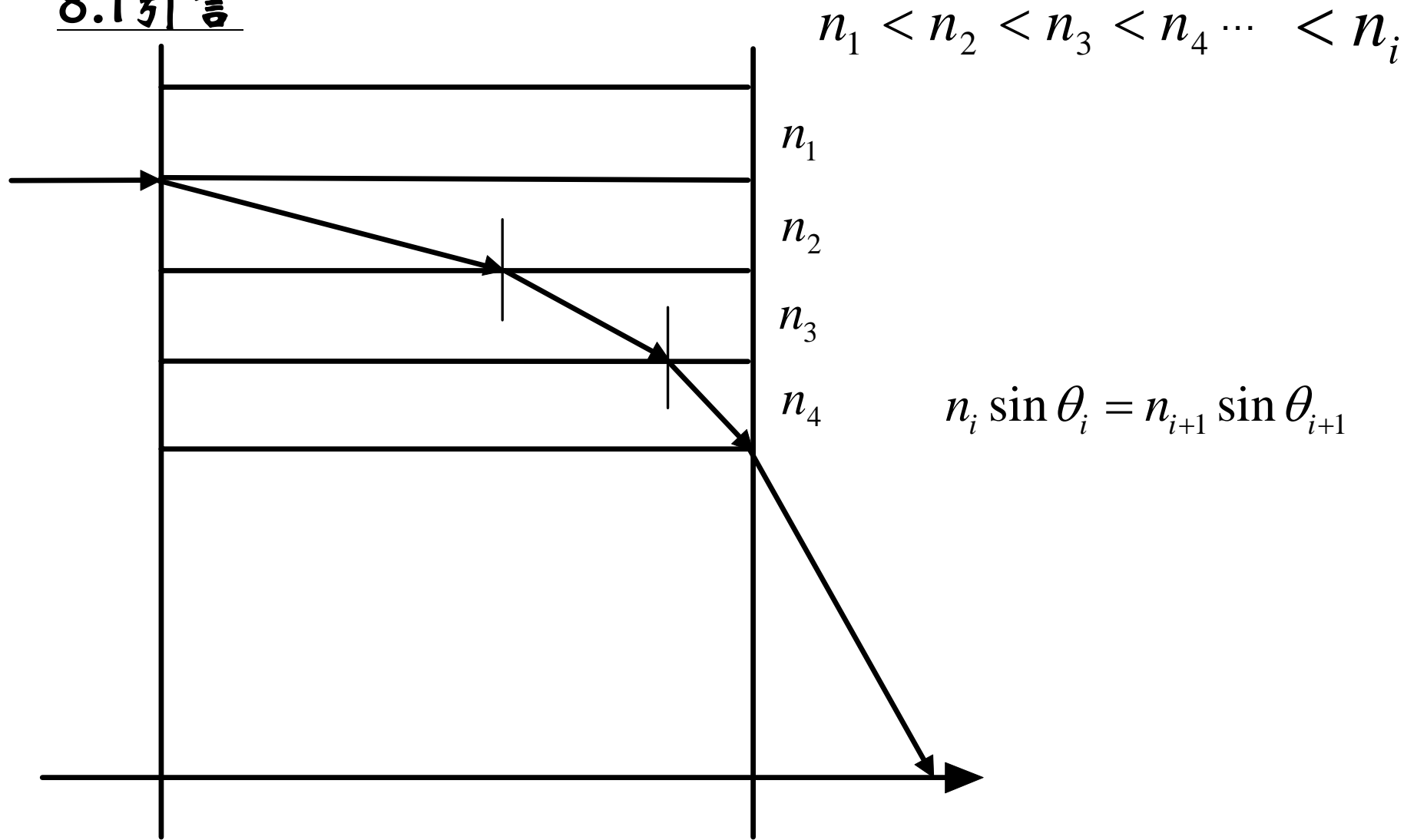


图8-2 光线在变折射率媒质中的行走

8.1 引言

- 这就启示我们认识到，一块平行平板玻璃，若材料的折射率有一定的空间分布或随空间有一定变化，它对光线一样有会聚或发散作用。
- 折射率仅沿某一个方向变化的媒质我们称为**梯度折射率（变化）媒质**，因为这个方向就是折射率变化的梯度方向。研究讨论几何光线在梯度折射率媒质中传播规律的光学称为**梯度折射率光线光学**。

8.2

自然界的梯度折射率媒质

- 在海平面上的大气中，在沙漠地表上的大气中，在机场跑道上的大气中，由于存在明显的温度梯度，进而使大气的密度从下至上是不均匀的。温度梯度的存在，使得大气折射率随海拔高度的不同而不同。
- 一般在这些大气中，无论是温度的变化，还是密度的变化，其变化的梯度方向都与海（地）平面垂直，故这些大气的折射率沿海拔高度方向作梯度变化。

1. 海市蜃楼

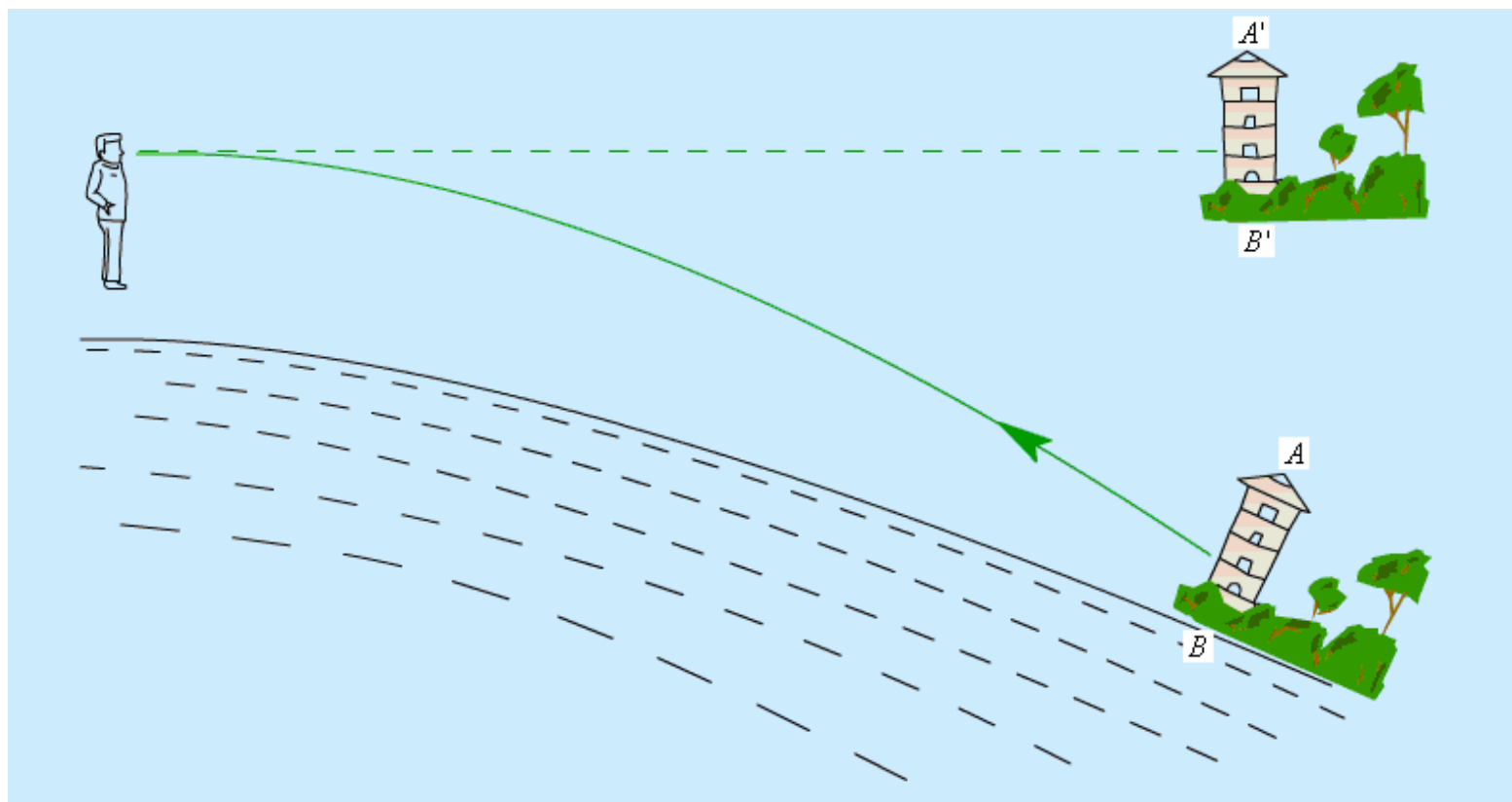


图8-3 海市蜃楼原理图

$$n^2(y) = n_0^2 + n_p^2 e^{-\alpha y} \quad (8-1)$$

2005年3月17日下
午16时59分

深圳湾出现海市蜃楼
海面上有高楼施工



转自大洋网

2. 沙洲神泉

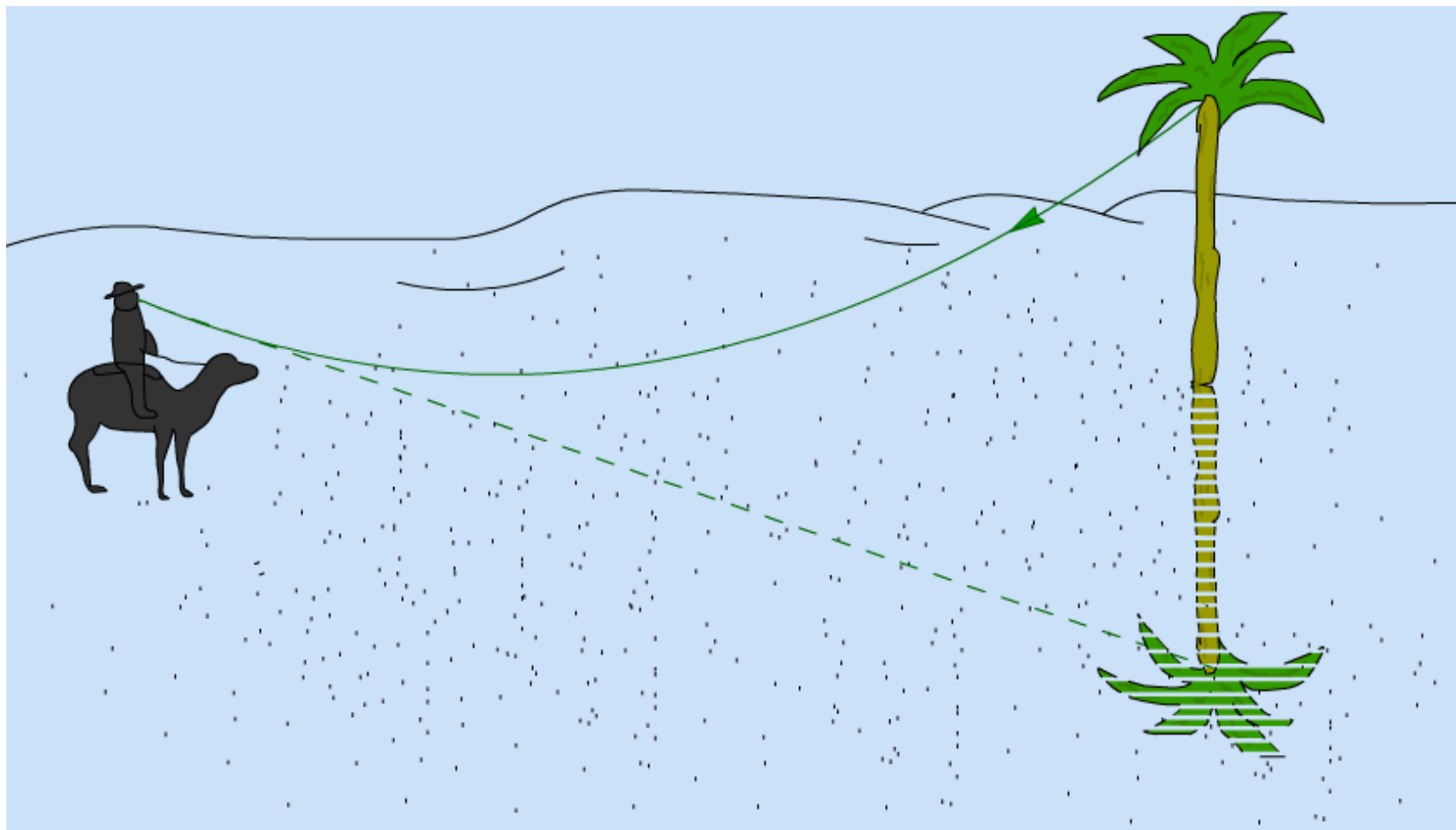


图8-4 沙漠神泉原理图

3. 机场跑道的可见距离问题

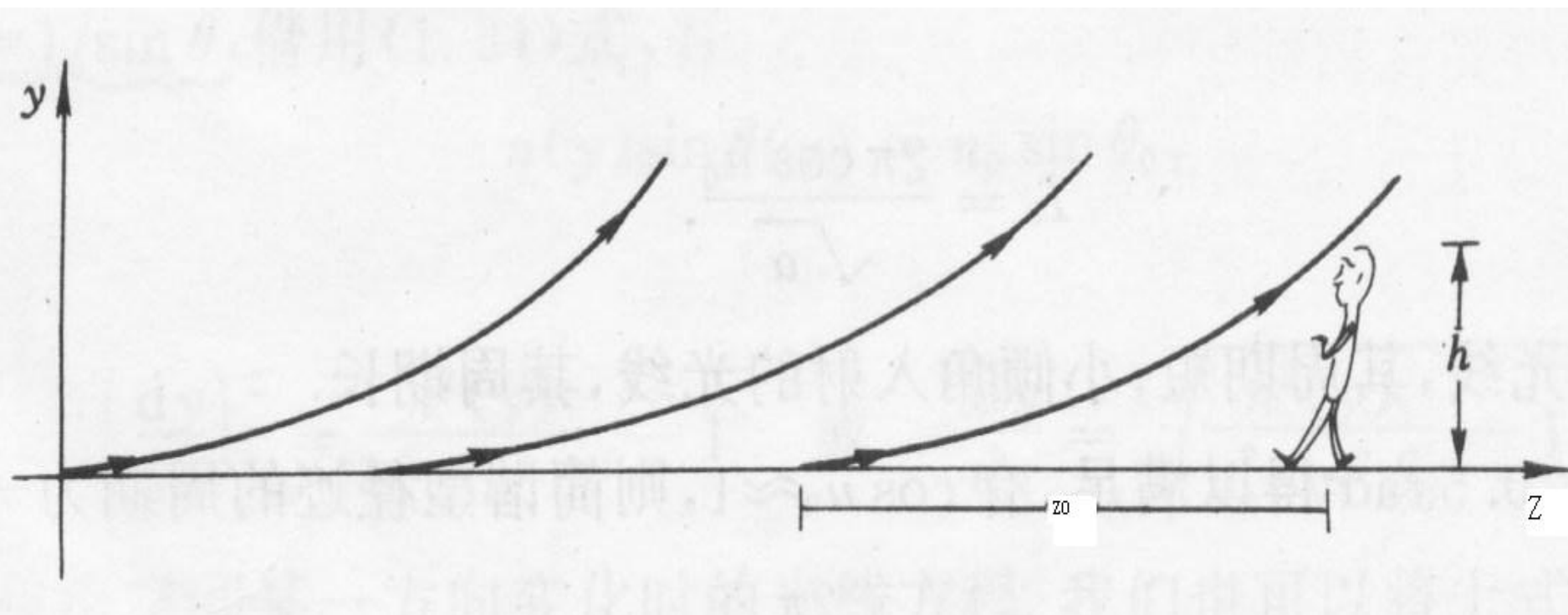


图8-5 可见的机场跑道长度

8.3

径向梯度媒质中的光线方程

1. 径向梯度折射率分布

- 折射率沿轴向均匀
- 轴线处折射率最大
- 折射率沿轴向均匀

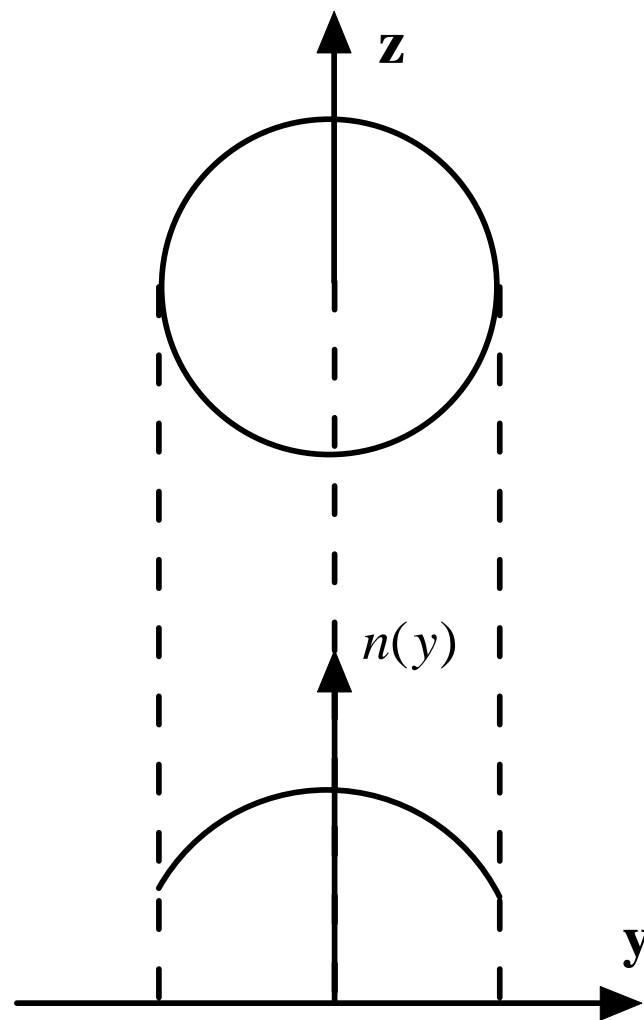


图8-6 径向梯度折射率棒

径向梯度折射率分布

- 折射率的分布函数：

$$n = n(\sqrt{x^2 + y^2}) = n_0 - n_1(\sqrt{x^2 + y^2}) \quad (8-2)$$

$$n(0,0) = n_0$$

- 轴面里讨论问题亦不失一般性： $(8-2) \Rightarrow$

$$n = n_0 - n_1(y) \quad (8-3)$$

我何将这个含轴面取为坐标面，称为子午面

径向梯度折射率分布

■ 两种典型分布:

■ A. 抛物线型:

$$n_p = n_0 \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 y^2\right) \quad (8-4)$$

■ B. 双曲正割型

$$n_h = n_0 \operatorname{Sech}(\alpha y) = n_0 \frac{2}{e^{\alpha y} + e^{-\alpha y}} \quad (8-5)$$

α 是一个折射率分布常数

将(8-5)式展成无穷级数:

$$\begin{aligned} n_h &= n_0 \operatorname{Sech}(\alpha y) = n_0 \left\{ 1 + \sum (-1)^k B_{2k} (\alpha y)^{2k} / (2k)! \right\} \\ &= \boxed{n_0 \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 y^2\right)} + \frac{5}{24} \alpha^4 y^4 - \frac{61}{720} \alpha^6 y^6 + \cdots \end{aligned} \quad (8-6)$$

B_{2k} : 欧勒数

2. 径向梯度媒质中的光线方程

■ 复习:

光线微分方程:

$$\frac{d(n\vec{\mathbf{a}})}{dl} = \nabla n \quad (1-38)$$

直角坐标系展开:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{d}{dl} \left(n \frac{dx}{dl} \right) = \frac{\partial n}{\partial x} \\ \frac{d}{dl} \left(n \frac{dy}{dl} \right) = \frac{\partial n}{\partial y} \\ \frac{d}{dl} \left(n \frac{dz}{dl} \right) = \frac{\partial n}{\partial z} \end{array} \right. \quad (1-39)$$

$(\frac{dx}{dl}, \frac{dy}{dl}, \frac{dz}{dl})$ 是光线的三个方向余弦

径向梯度媒质中的光线方程

■ (8-3) \Rightarrow (1-39)

$$\begin{cases} \frac{d}{dl} \left(n \frac{dx}{dl} \right) = 0 \\ \frac{d}{dl} \left(n \frac{dy}{dl} \right) = \frac{dn}{dy} \\ \frac{d}{dl} \left(n \frac{dz}{dl} \right) = 0 \end{cases} \quad (8-7)$$

\Rightarrow

$$\begin{cases} n(y) \cos \theta_x = n(y_0) \cos \theta_{0x} \\ n(y) \cos \theta_z = n(y_0) \cos \theta_{0z} \end{cases} \quad (8-8)$$

(x_0, y_0, z_0) 是入射点坐标, $(\theta_{0x}, \theta_{0z})$ 分别是入射光线与x轴和z轴夹角

径向梯度媒质中的光线方程

子午面内，入射角 θ_0 :

$$\theta_0 + \theta_{oz} = \frac{\pi}{2}$$

\Rightarrow

$$n(y) \sin \theta(y) = n(y_0) \sin \theta_0 = n \frac{dz}{dl}$$

(8-9)

\Rightarrow

$$\frac{dz}{dl} = \frac{n(y_0)}{n(y)} \sin \theta_0 \quad (8-10)$$

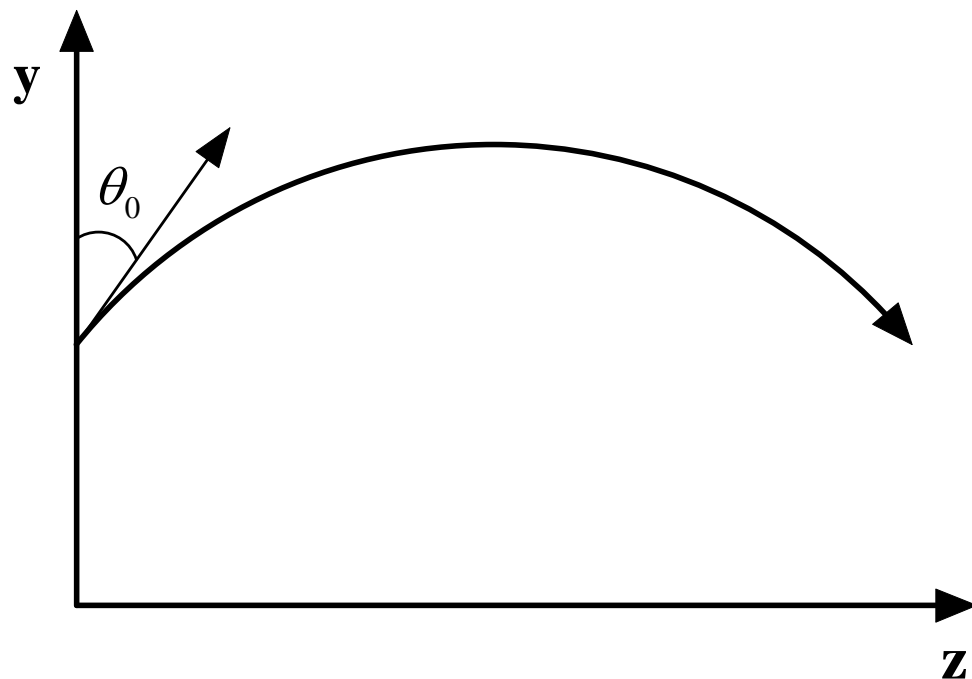


图8-7 折射率的分布与解题用的坐标系

径向梯度媒质中的光线方程

结合

$$\frac{dy}{dl} = \pm \sqrt{1 - \left(\frac{dz}{dl}\right)^2} \quad \text{和} \quad \frac{dy}{dz} = \sqrt{\left(\frac{dl}{dz}\right)^2 - 1}$$

得：

$$\frac{dy}{dz} = \sqrt{\frac{n^2(y) - n^2(y_0)\sin^2\theta_0}{n^2(y_0)\sin^2\theta_0}} \quad (8-11)$$

子午面光线方程

$$\frac{dy}{dl} = \pm \sqrt{n^2(y) - n^2(y_0)\sin^2\theta_0} \cdot \frac{1}{n(y)} \quad (8-12)$$

(8-11) \Rightarrow

$$\frac{d^2y}{dz^2} = \frac{1}{2n^2(y_0)\sin^2\theta_0} \cdot \frac{d(n^2)}{dy} \quad (8-13)$$

径向梯度媒质中的光线方程

光线走向分析

(1) $0 < \theta_0 \leq \frac{\pi}{2}$, 根号前取正值:

$$y \uparrow \Rightarrow n(y) \downarrow \Rightarrow \sqrt{1 - \frac{n^2(y_0) \sin^2 \theta_0}{n^2(y)}} \downarrow \Rightarrow \frac{dy}{dl} \downarrow \Rightarrow \cos \theta_y \downarrow \Rightarrow \theta_y \uparrow \Rightarrow \theta_y = \frac{\pi}{2}$$

$\theta = \frac{\pi}{2}$ 时光线所在地点的坐标标记为, 有:

$$n^2(Y) = n^2(y_0) \sin^2 \theta_0 \quad (8-14)$$

当光线到达点(Y,z)时, 光线方向与z轴平行, 随后光线向弯向z轴的方向前进, 见下图:

径向梯度媒质中的光线方程

光线走向分析

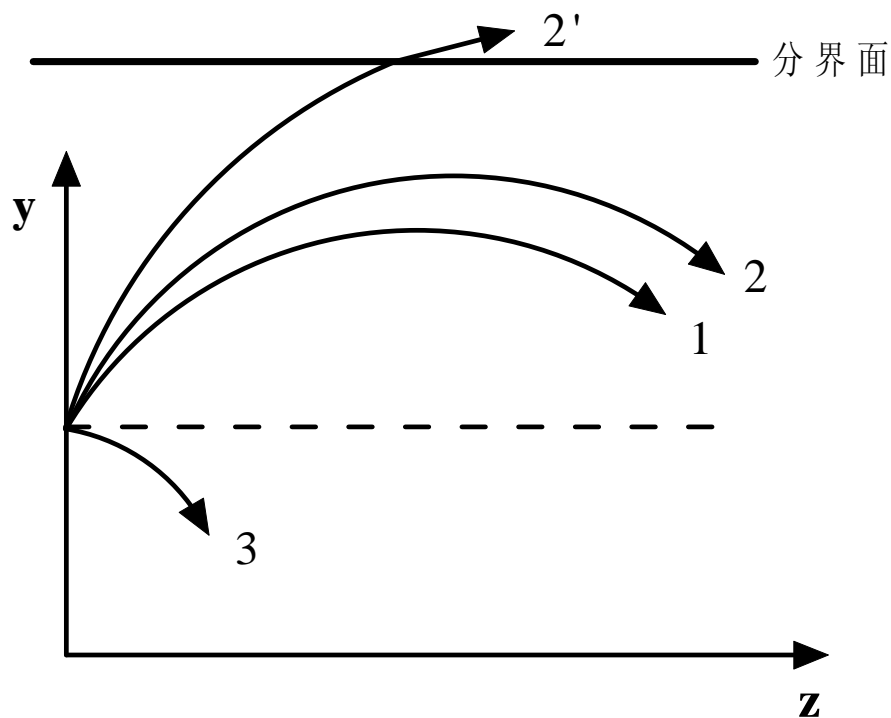
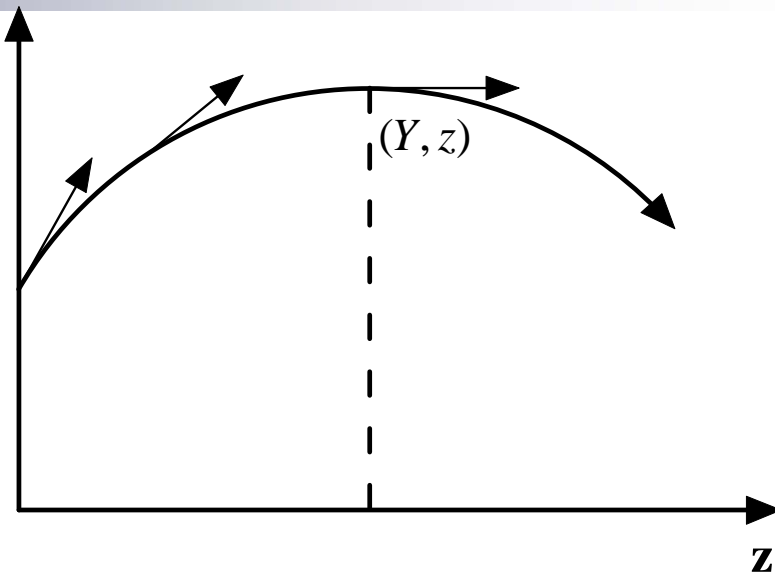


图8-8 光线的走向分析

径向梯度媒质中的光线方程

光线走向分析

(2) 光线2入射角 $(\theta_0)_2$ 比光线1入射角 $(\theta_0)_1$ 小, 入射点相同:

$$\sqrt{1 - \frac{n^2(y_0)\sin^2(\theta_0)_2}{n^2(y)}} > \sqrt{1 - \frac{n^2(y_0)\sin^2(\theta_0)_1}{n^2(y)}}$$

$$\left(\frac{dy}{dl}\right)_2 > \left(\frac{dy}{dl}\right)_1 \Rightarrow (\cos\theta_y)_2 > (\cos\theta_y)_1 \Rightarrow (\theta_y)_2 < (\theta_y)_1$$

(3) $\frac{\pi}{2} < \theta_0 < \pi$, 根号前取正值: $\frac{dy}{dl} = -\sqrt{n^2(y) - n^2(y_0)\sin^2\theta_0} \cdot \frac{1}{n(y)}$

$$\begin{aligned} z \uparrow &\Rightarrow y \downarrow \Rightarrow n(y) \uparrow \Rightarrow \sqrt{1 - \frac{n^2(y_0)\sin^2\theta_0}{n^2(y)}} \uparrow \Rightarrow -\sqrt{1 - \frac{n^2(y_0)\sin^2\theta_0}{n^2(y)}} \downarrow \Rightarrow \\ &\Rightarrow \cos\theta_y \downarrow \Rightarrow \theta_y \uparrow \end{aligned}$$

3. 抛物线型媒质中子午光线方程的解

折射率服从式(8-4):

$$n_p = n_0 \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 y^2\right)$$

所以: $n_p^2 = n_0^2 \left(1 - \frac{1}{2} \alpha^2 y^2\right)^2$ $\alpha^2 y^2 \ll 1$

则 $n_p^2 \approx n_0^2 (1 - \alpha^2 y^2)$ (8-15)

$\Rightarrow \frac{d(n_p^2)}{dy} = -2\alpha^2 n_0^2 y$ (8-16)

抛物线型媒质中子午光线方程的解

(8-16)代入子午面光线方程(8-13):

$$\frac{d^2 y}{dz^2} = \frac{-\alpha^2 n_0^2}{n^2(y_0) \sin^2 \theta_0} y \quad (8-17)$$

这个方程的通解一般为简谐函数，即：

$$y(z) = C \cdot \cos\left(\frac{\alpha n_0}{n(y_0) \sin \theta_0} z + \varphi_0\right) \quad (8-18)$$

其中待定常数 (C, φ_0) 由边界条件，即光线出发点的位置坐标 (y_0, z_0) 和光线斜率 $(dy/dz)_{z_0}$ 来确定

抛物线型媒质中子午光线方程的解

光轴上点发出的光束中各光线的径迹均系简谐曲线
其空间周期为：

$$T = \frac{2\pi n(y_0) \sin \theta_0}{\alpha n_0} \quad (8-19)$$

以光线的孔径角 u_0 表示，因为 $\sin \theta_0 = \cos u_0$

$$T = \frac{2\pi n(y_0) \cos u_0}{\alpha n_0} \quad (8-20)$$

在近轴区， $n(y_0) \approx n_0$ $\cos u_0 \approx 1$ 周期为一常数：

$$T_0 = \frac{2\pi}{\alpha} \quad (8-21)$$

抛物线型媒质中子午光线方程的解

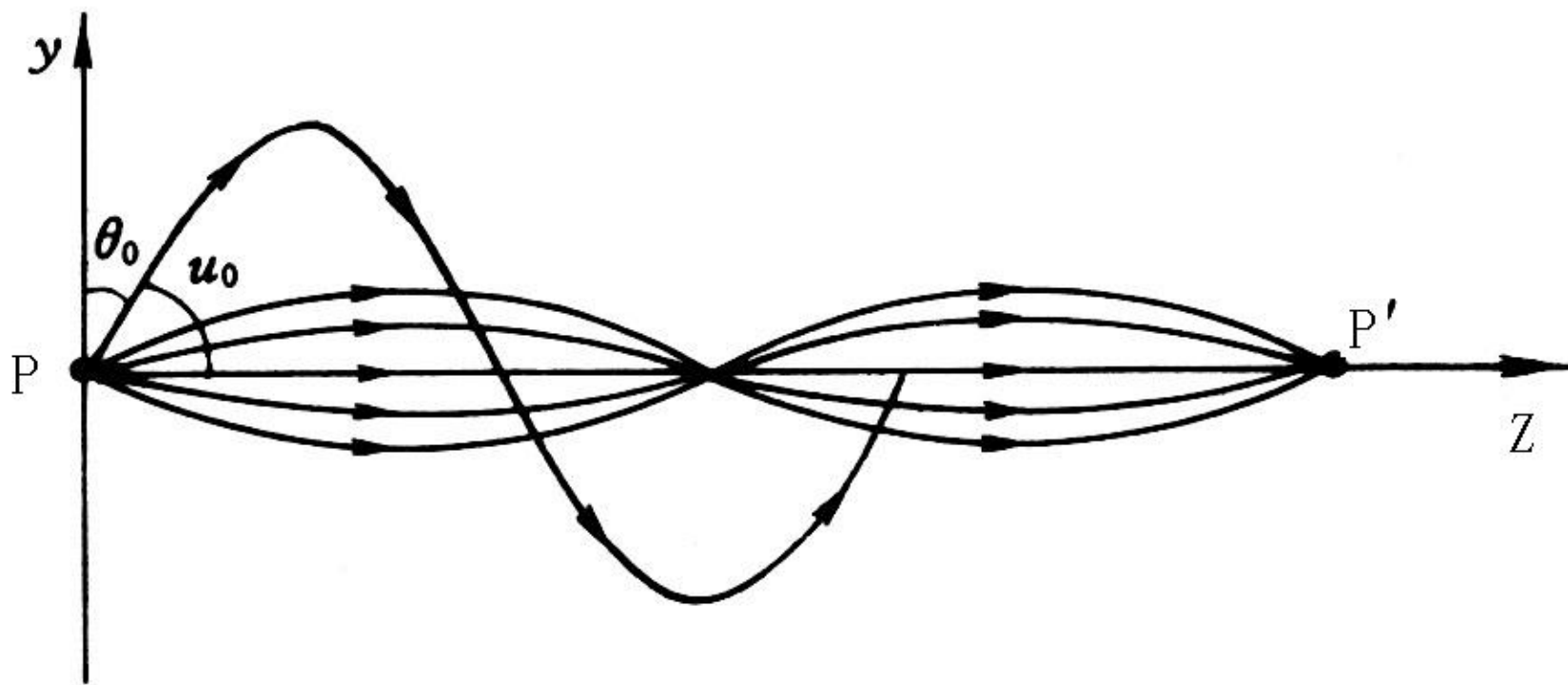


图8-9 径向梯度媒质中轴上点发出的光线径迹

4. 双曲正割型媒质中的光线聚焦特性

折射率分布函数：

$$n_h = n_0 \operatorname{Sech}(\alpha y) = n_0 \frac{2}{e^{\alpha y} + e^{-\alpha y}} \quad (8-5)$$

考虑光线在一个周期内的光程：

$$dl = \sqrt{1 + \left(\frac{dz}{dy}\right)^2} dy \quad (8-22)$$

将(8-11)式代入，得

$$dl = \sqrt{1 + \frac{n^2(y_0) \sin^2 \theta_0}{n^2(y) - n^2(y_0) \sin^2 \theta_0}} \cdot dy \quad (8-23)$$

双曲正割型媒质中的光线聚焦特性

$$\begin{aligned}\text{光程} \quad \int_{T_0}^Y n(y) dl &= 4 \int_0^Y n(y) \sqrt{1 + \frac{n^2(y_0) \sin^2 \theta_0}{n^2(y) - n^2(y_0) \sin^2 \theta_0}} \cdot dy \\ &= 4 \int_0^Y \frac{n^2(y)}{\{n^2(y) - n^2(y_0) \sin^2 \theta_0\}^{\frac{1}{2}}} \cdot dy\end{aligned}\quad (8-24)$$

将(8-5)式代入

$$\int_{T_0}^Y n(y) dl = 4 \int_0^Y \frac{n_0 \operatorname{sech}^2(\alpha y)}{\left\{ \operatorname{sech}^2(\alpha y) - \frac{n^2(y_0)}{n_0^2} \sin^2 \theta_0 \right\}^{\frac{1}{2}}} \cdot dy\quad (8-25)$$

双曲正割型媒质中的光线聚焦特性

引入新变量g:

$$g = \tanh(\alpha y) = \frac{e^{\alpha y} - e^{-\alpha y}}{e^{\alpha y} + e^{-\alpha y}} \quad (8-26)$$

$$\Rightarrow dg = \alpha \operatorname{sech}^2(\alpha y) dy \quad (8-27)$$

代入(8-25) $(\operatorname{sech}^2(\alpha y) = 1 - \tanh^2(\alpha y))$

$$\int_{T_0} n(y) dl = \frac{4n_0}{\alpha} \int_0^{\tanh(\alpha Y)} \frac{dg}{\left\{ \left[1 - \frac{n^2(y_0)}{n_0^2} \sin^2 \theta_0 \right] - g^2 \right\}^{\frac{1}{2}}} = \frac{4n_0}{\alpha} \sin^{-1} \left\{ \frac{\tanh(\alpha Y)}{\left[1 - \frac{n^2(y_0)}{n_0^2} \sin^2 \theta_0 \right]^{\frac{1}{2}}} \right\} \quad (8-28)$$

双曲正割型媒质中的光线聚焦特性

又因为

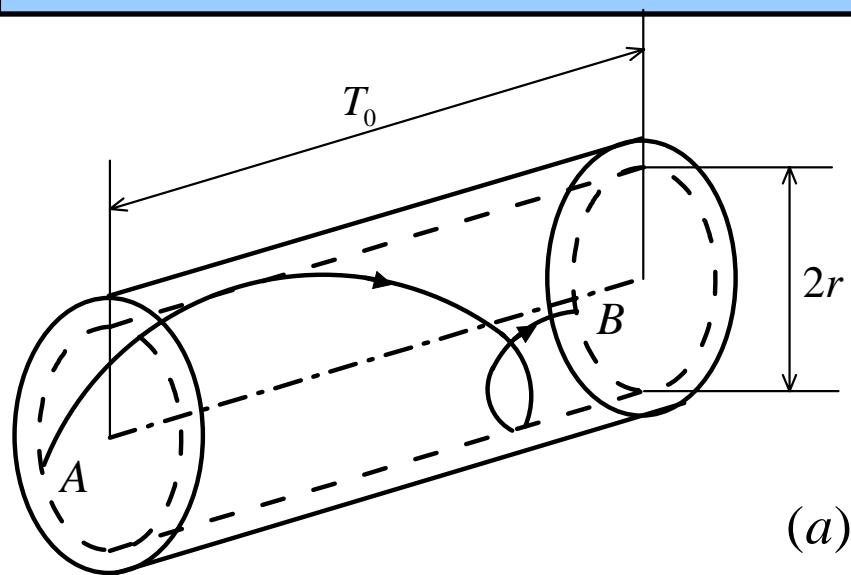
$$\begin{aligned} \operatorname{Tanh}(\alpha Y) &= \{1 - \operatorname{Sech}^2(\alpha Y)\}^{\frac{1}{2}} \\ &= \left\{1 - \frac{n^2(Y)}{n_0^2}\right\}^{\frac{1}{2}} = \left\{1 - \frac{n^2(y_0)}{n_0^2} \sin^2 \theta_0\right\}^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

(8-28) \Rightarrow

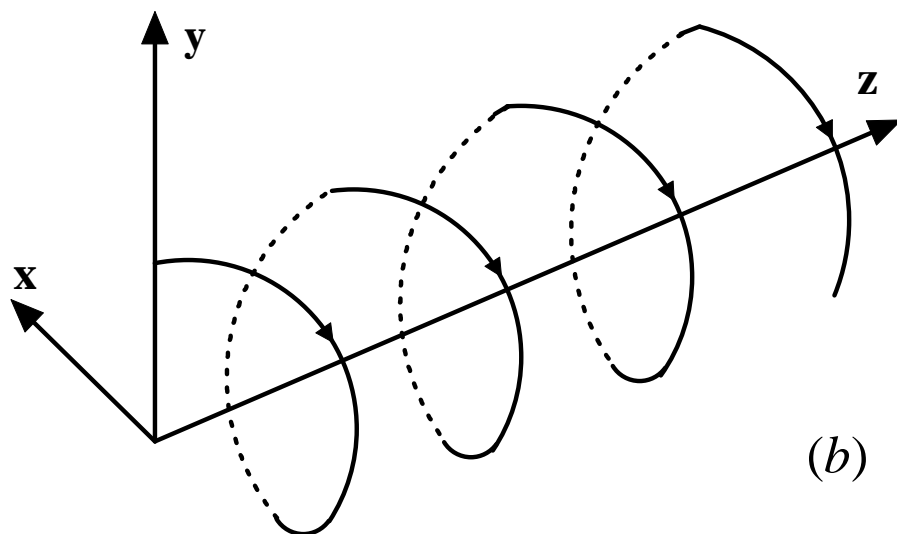
$$\int_{T_0} n(y) dl = \frac{2\pi n_0}{\alpha} \quad (8-29)$$

在双曲正割媒质中，从一点发出的子午光线无论其孔径角或大或小，它们走完半个周期的整数倍后光程是相等的，所以它们的周期是相同的，所以在这种媒质中一轴外点发出的子午光线又可以聚焦于一点；又由于折射率分布是以光轴旋转对称的，所以轴上物点是可以点物成点像的。

5. 梯度折射率媒质中的斜光线



(a)



(b)

图8-10 螺旋光线径迹

梯度折射率媒质中的斜光线

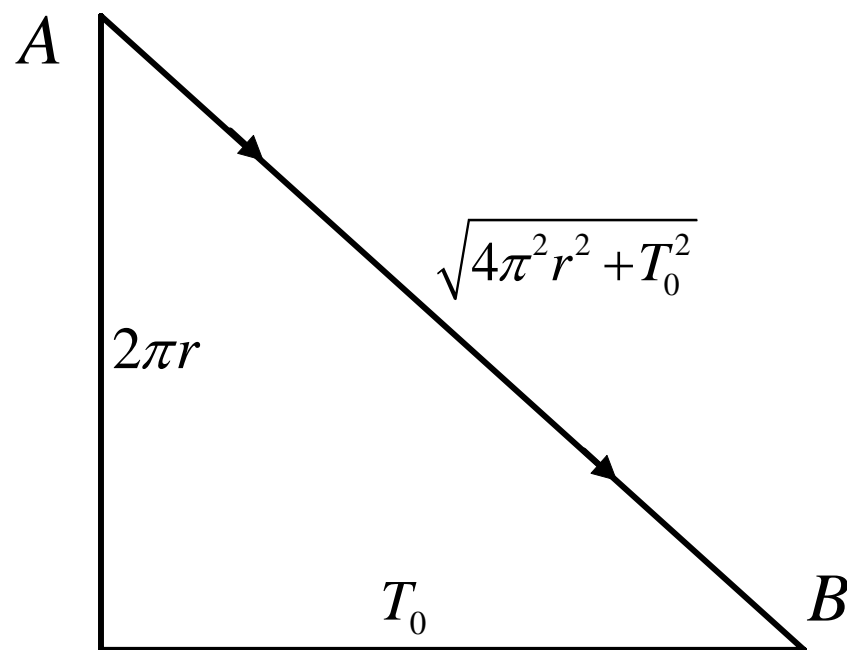


图8-11 展开的螺旋光线几何长度

梯度折射率媒质中的斜光线

传播一个周期 T_0 后的光程：

$$\int_{T_0} n dl = n(r) \int_{T_0} dl \quad (8-30)$$

而螺旋光线的几何长度：

$$\int_{T_0} dl = \{4\pi^2 r^2 + T_0^2\}^{\frac{1}{2}} \quad (8-31)$$

$$\Rightarrow \int_{T_0} n dl = n(r) \{4\pi^2 r^2 + T_0^2\}^{\frac{1}{2}} \quad (8-32)$$

梯度折射率媒质中的斜光线

结合双曲正割媒质中，轴外某点发出的子午光线走过一个周期后的光程：

$$\int_{T_0} n(y) dl = \frac{2\pi n_0}{\alpha} \quad (8-29)$$

若想这一点发出的螺旋光线经一个周期的传播后与子午等光线又聚焦于一点，据费马原理：

$$n(r) \{4\pi^2 r^2 + T_0^2\}^{\frac{1}{2}} = \frac{2\pi n_0}{\alpha} \quad (8-33)$$

$$\Rightarrow \text{折射率分布: } n(r) = n_0 (1 + \alpha^2 r^2)^{-1/2} \quad (8-34)$$

梯度折射率媒质中的斜光线

讨论

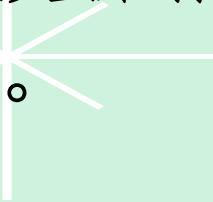

1. 式(8-34)和式(8-5)是不一致的。可见对于子午光线的自聚焦为理想分布的双曲正割媒质，对于螺旋光线的自聚焦便不是理想分布的，反之亦然
2. 在近轴区，将式(8-34)用级数展开便可得抛物线型分布，即：

$$n(r) = n_0(1 + \alpha^2 r^2)^{-1/2} = n_0(1 - \frac{1}{2}\alpha^2 r^2) \quad (8-35)$$

也就是说，对于近轴区域，式(8-34)、式(8-5)和式(8-4)三种分布都一致了，都是抛物线型分布。

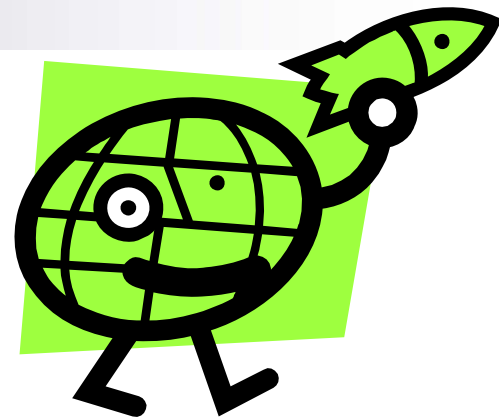
8.4

自聚焦透镜及其成像

- 将由梯度折射率媒质做成的透镜称为自聚焦透镜。
- 已经分析了这些材料的分布及各种光线在其中的走向，为了达到自聚焦或近似自聚焦，其折射率应该自光轴横截面内半径方向呈抛物线状连续变小。

根据轴对称性将它简化为二维表示式

$$n(y) = n(0)\left(1 - \frac{1}{2}\alpha^2 y^2\right)$$



当近轴光线在其中传播时，光线的路径为正弦或余弦曲线，可表示为

$$y(z) = C \cos(\alpha z + \varphi_0)$$

其中由 (C, φ_0) 具体问题的边界条件确定， $\alpha = \frac{2\pi}{T_0}$ ， T_0 是路径的周期长度。

1. 近轴光学

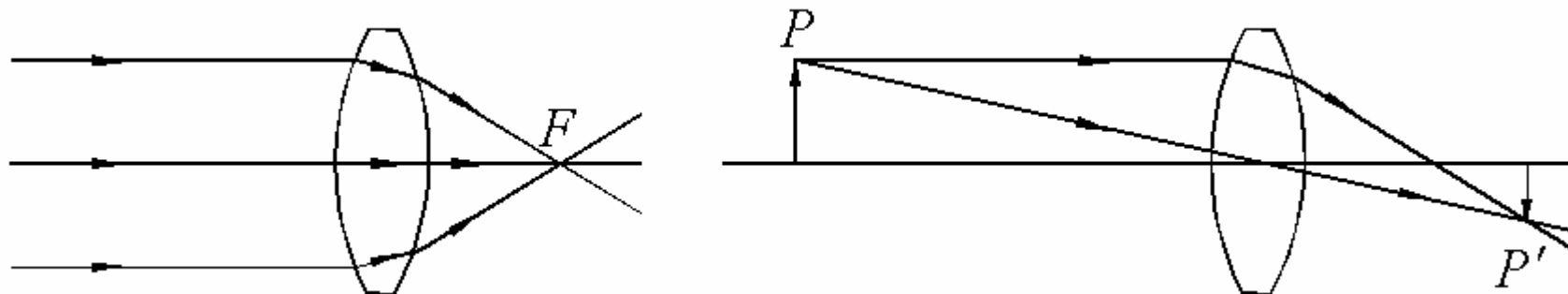


图8-12 均匀折射率球面透镜成像

一般的正光焦度的球面透镜可以会聚光线并能成像。它可以将一点发出的近轴光线能够很好地会聚于另外一点，成为一个理想的像点。

近轴光学

自聚焦透镜的折射率是一定规律变化的，光线在其中自动地沿曲折的路径传播，可以预计对于近轴光的情形。

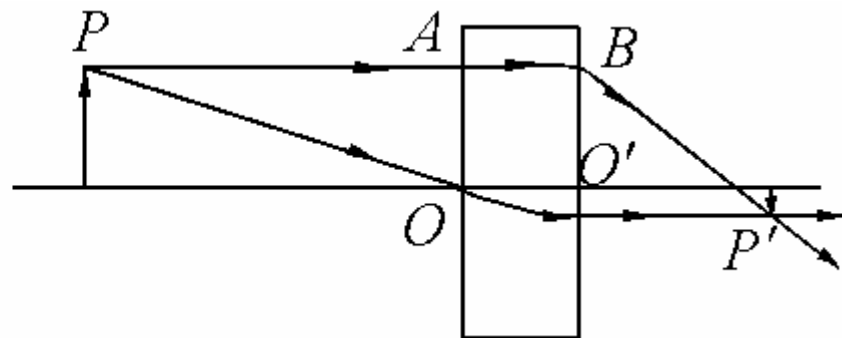
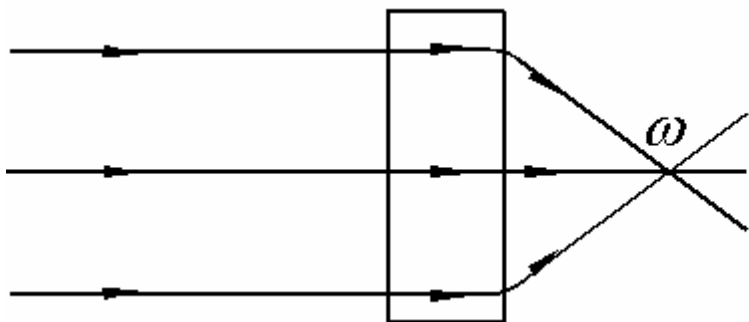


图8-13 自聚焦透镜的成像

自然，对光线的偏折主要在于透镜内部，如果没有这样一种偏折，则图8-13中的光学元件便成了一块普通的平行平板了。

近轴光学

- 可见，自聚焦透镜不同于普通的球面透镜，前者主要依靠折射率的恰当变化（由式决定）来对近轴光成像的。较之普通的球面透镜，自聚焦透镜有其独特的优点，它可以做的很小，可以获得超短焦距，并可以弯曲传像（如做成自聚焦光纤）等。这些都是一般透镜很难做到甚至根本做不到的。

2、自聚焦透镜的焦点、焦距和主点、主平面

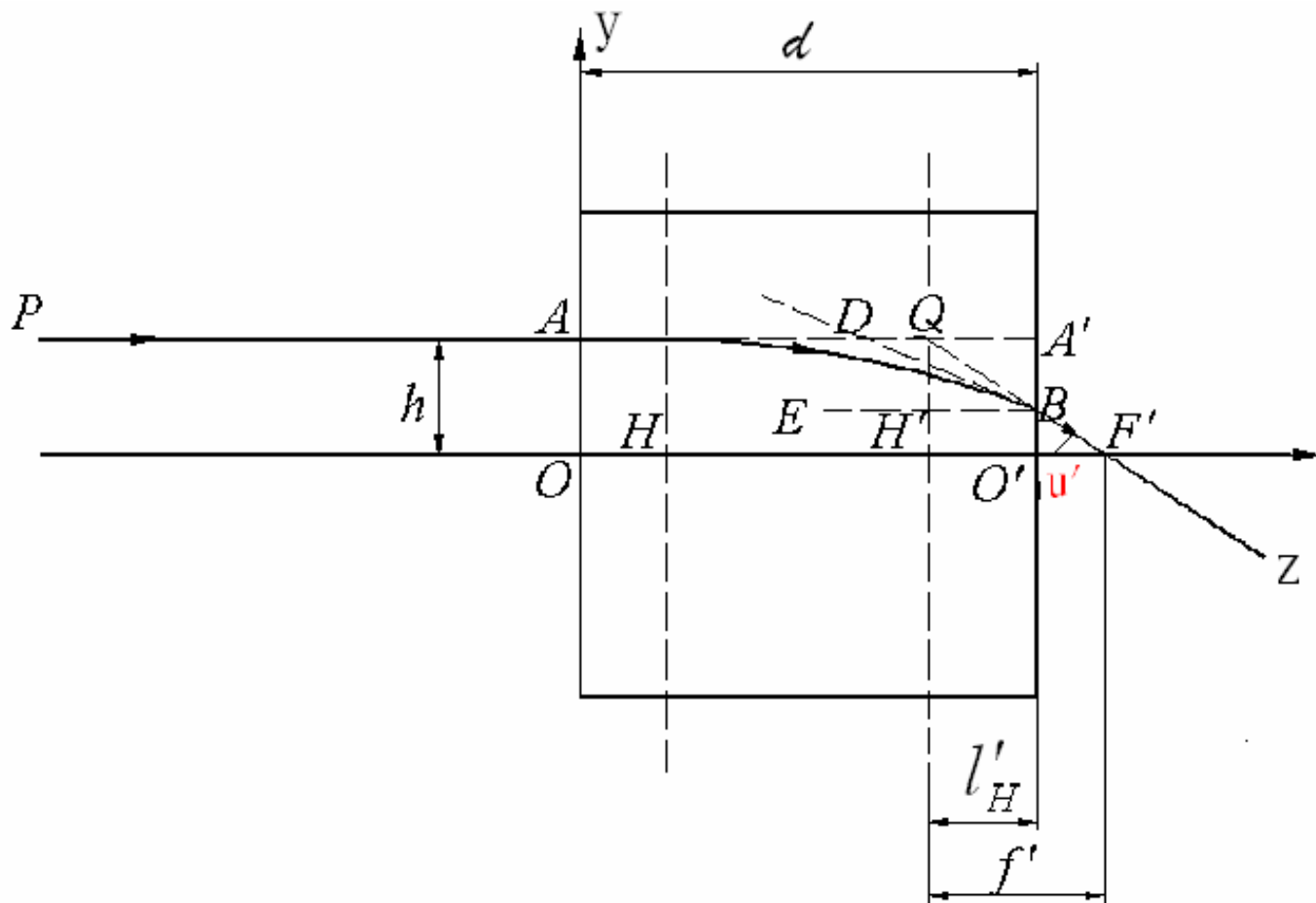
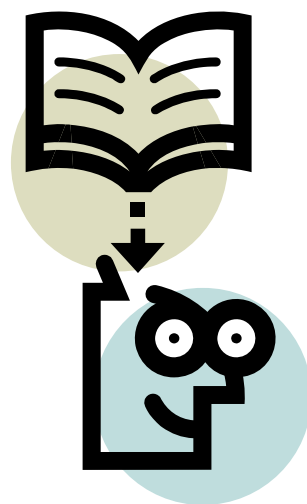
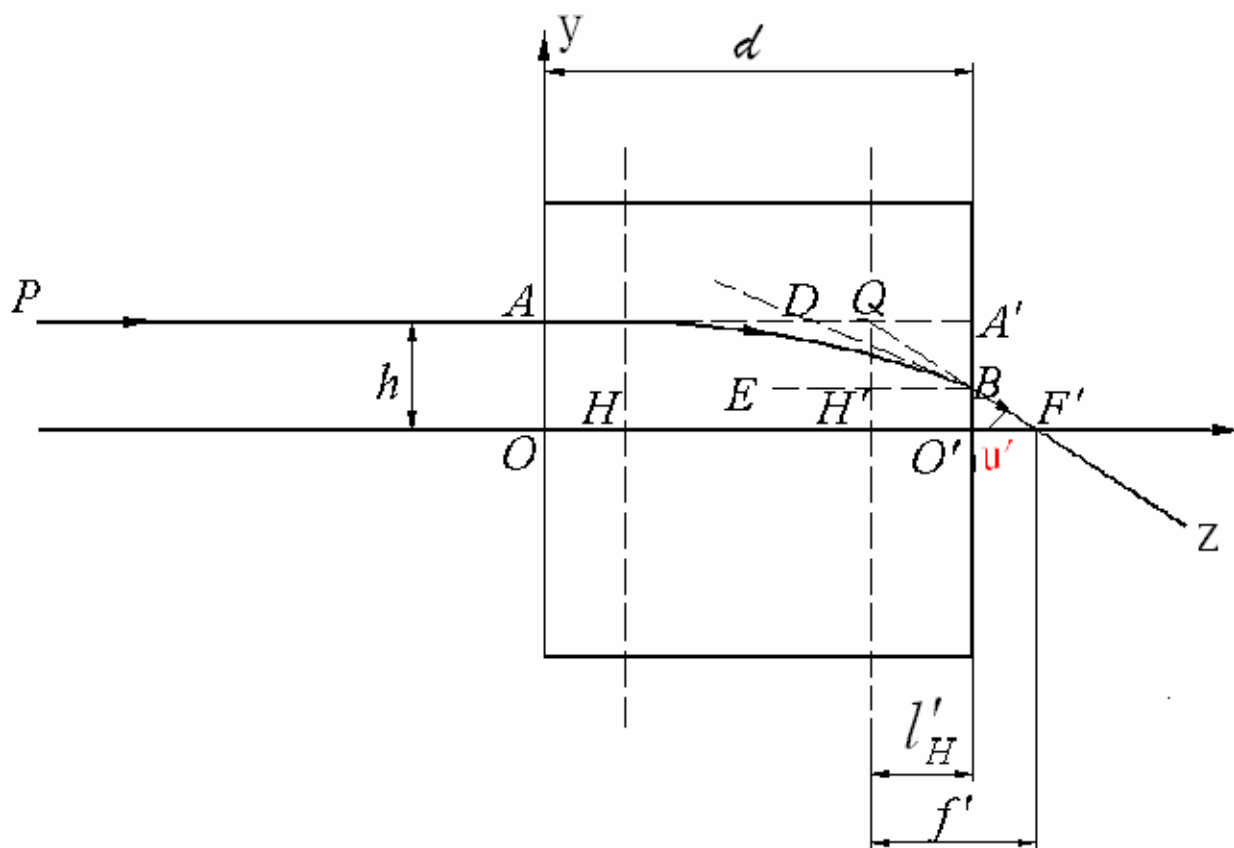


图8-14 自聚焦透镜的主点、焦点和焦距

自聚焦透镜的焦点、焦距和主点、主平面

选坐标系YOZ 如图8-14所示，作直线DB 表示余弦曲线在 B 点的切线，此即透镜内部的光线在B 点处的方向。再作直线EB 平行于光轴OO'。自聚焦透镜的厚度为d。余弦曲线服从式

$$y(z) = C \cos(\alpha z + \varphi_0) \quad (8-37)$$



自聚焦透镜的焦点、焦距和主点、主平面

已知入射点A的坐标为 $(h, 0)$ ，又由于入射光线平行于光轴 $00'$

所以在A点处有 $\frac{dy}{dz} = 0$ ，据此，由式(8-37)有

$$\begin{aligned} y(z=0) &= C \cos(\alpha z + \varphi_0) \\ &= C \cos \varphi_0 \\ &= h \end{aligned} \quad (8-38)$$

和

$$\begin{aligned} \frac{dy}{dz}(z=0) &= -C \alpha \sin(\alpha z + \varphi_0) \\ &= -C \alpha \sin \varphi_0 \\ &= 0 \end{aligned} \quad (8-39)$$



自聚焦透镜的焦点、焦距和主点、主平面

据这两个式子，可由边界条件确定出自聚焦透镜内部光线路径所服从的余弦曲线之两个待定常数为

$$\begin{cases} C = h \\ \varphi_0 = 0 \end{cases} \quad (8-40)$$

所以，余弦曲线AB的函数表示为

$$y(z) = h \cos(\alpha z) \quad (8-41)$$

B点处自聚焦透镜内部光线的斜率为

$$\frac{dy}{dz}(z = d) = -\alpha h \sin(\alpha d) \quad (8-42)$$



自聚焦透镜的焦点、焦距和主点、主平面

这里入射角由光线转向法线是沿逆时针方向旋转的，所以是负值；从数学上考虑光线的斜率也是负值，所以二者符号是相同的。故

$$i = -\alpha h \sin(\alpha d) \quad (8-43)$$

B点处出射光线即沿BF' 传播的光线之折射角*i'* 据折射定律为

$$i' = n(B)i \quad (8-44)$$

将式(8-36)代入有

$$\begin{aligned} i' &= n(0)\left(1 - \frac{1}{2}\alpha^2 y_B^2\right)i \\ &\approx n(0)i \\ &= -n(0)\alpha h \sin(\alpha d) \end{aligned} \quad (8-45)$$

自聚焦透镜的焦点、焦距和主点、主平面

由于图8-14中像方孔径角 u' 为

$$\begin{aligned} u' &= -i' \\ &= n(0)\alpha h \sin(\alpha d) \end{aligned} \quad (8-46)$$

所以自聚焦透镜的焦距 f' 为

$$f' = \frac{h}{u'} = \frac{1}{n(0)\alpha \sin(\alpha d)} \quad (8-47)$$

现再求主平面位置 l_H' ，如图所示有

$$-l_H' = f' - O'F' = f' - \frac{O'B}{\operatorname{tg} u'}$$

自聚焦透镜的焦点、焦距和主点、主平面

由于

$$O'B = y(z = d) = h \cos(\alpha d)$$

这里已经利用了式(8-41)，再利用式(8-46)和式(8-47)，有

$$\begin{aligned} l_H' &= -\left(f' - \frac{h \cos(\alpha d)}{n(0)\alpha h \sin(\alpha d)}\right) \\ &= -\left(\frac{1}{n(0)\alpha \sin(\alpha d)} - \frac{\cos(\alpha d)}{n(0)\alpha \sin(\alpha d)}\right) \\ &= -\frac{1 - \cos(\alpha d)}{n(0)\alpha \sin(\alpha d)} = -\frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha d}{2}}{n(0)\alpha} \end{aligned} \quad (8-48)$$

自聚焦透镜的焦点、焦距和主点、主平面

值得指出，由自聚焦透镜的焦距公式(8-47)可看出，焦距除与梯度折射率媒质的折射率分布密切相关外，还与自聚焦透镜的厚度密切相关。

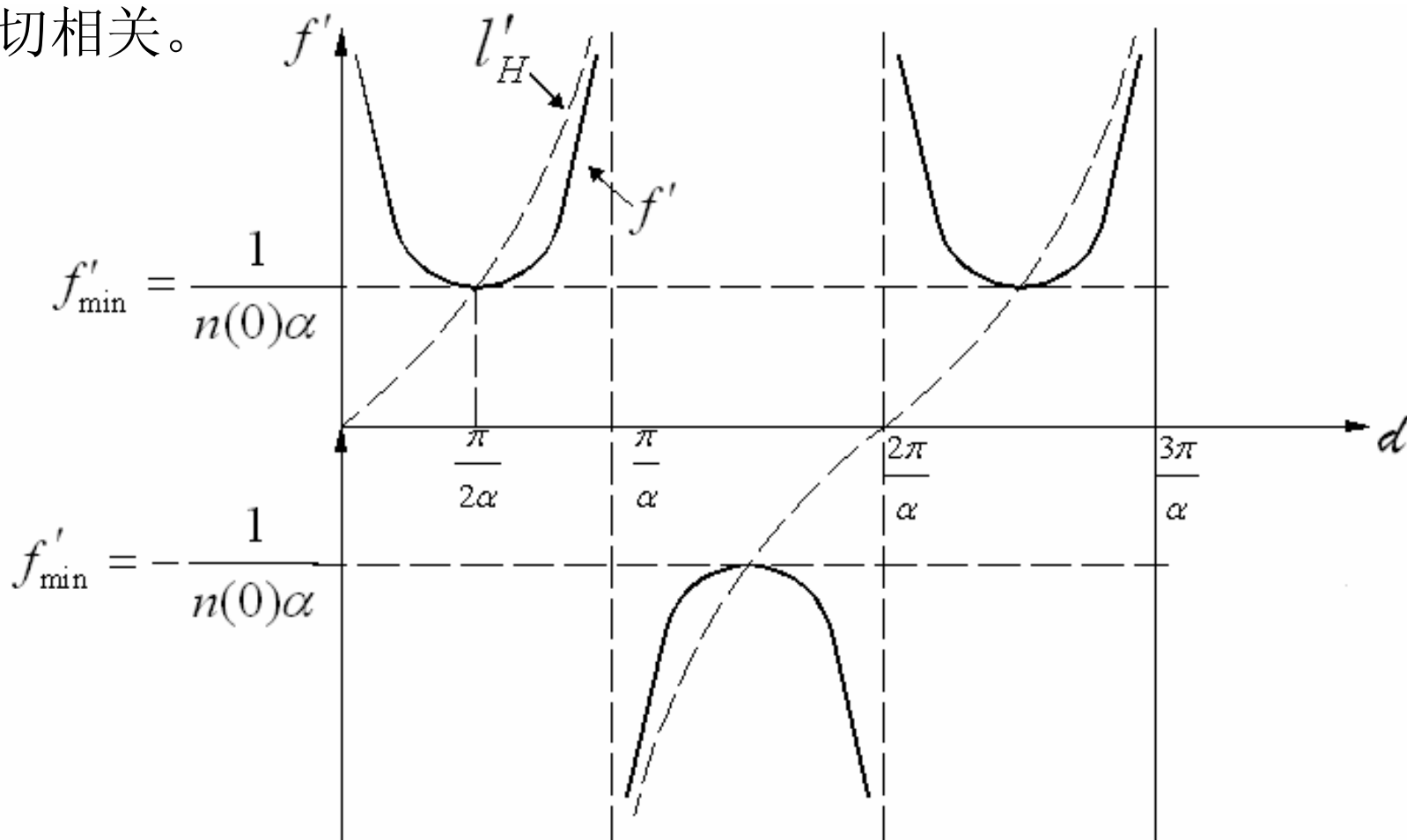


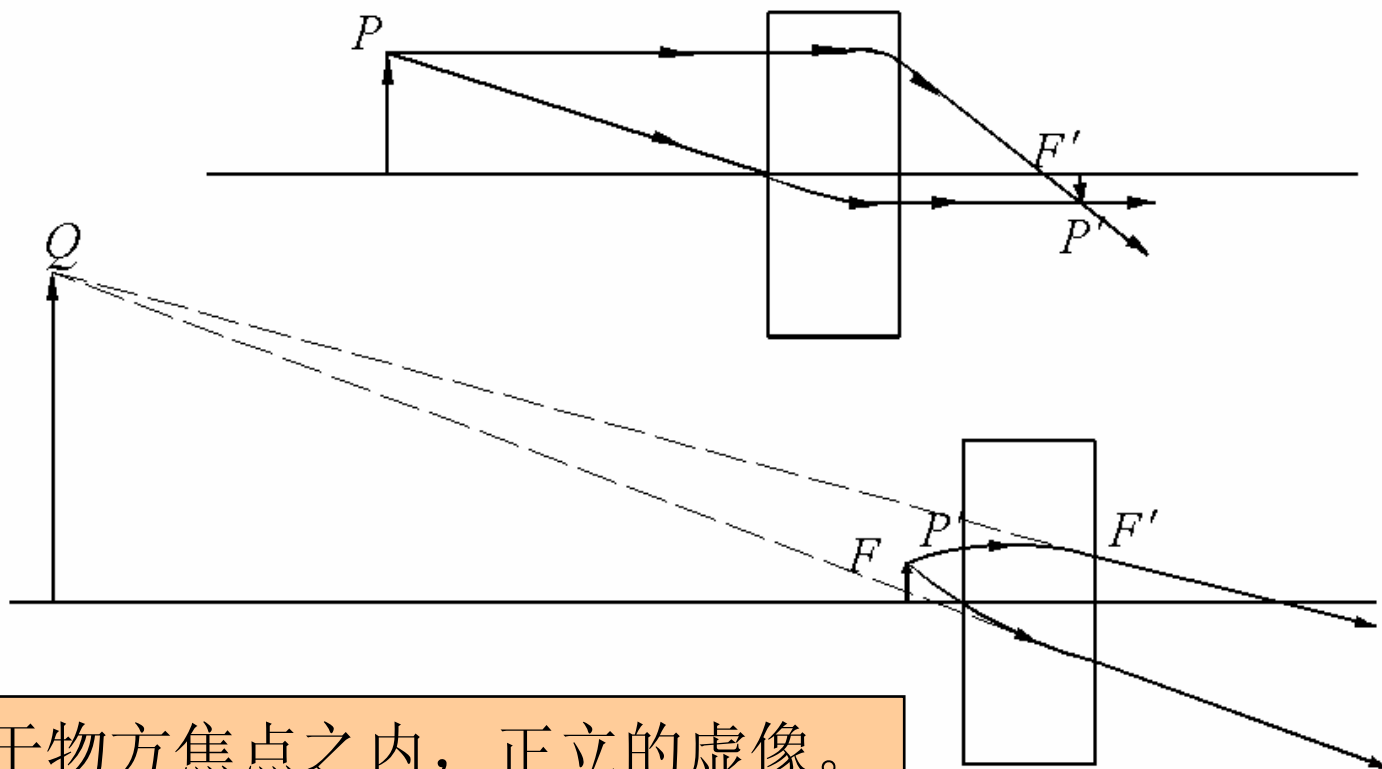
图8-15 自聚焦透镜的焦距，主面位置与透镜厚度的函数关系

3、自聚焦透镜成像的各种情况

$$(1) \quad 0 < d < \frac{\pi}{2\alpha}$$

(i) 物离透镜较远时，倒立的实像；

图8-16(1)



(ii) 物位于物方焦点之内，正立的虚像。

自聚焦透镜成像的各种情况

$$(2) \quad d = \frac{\pi}{2\alpha}$$

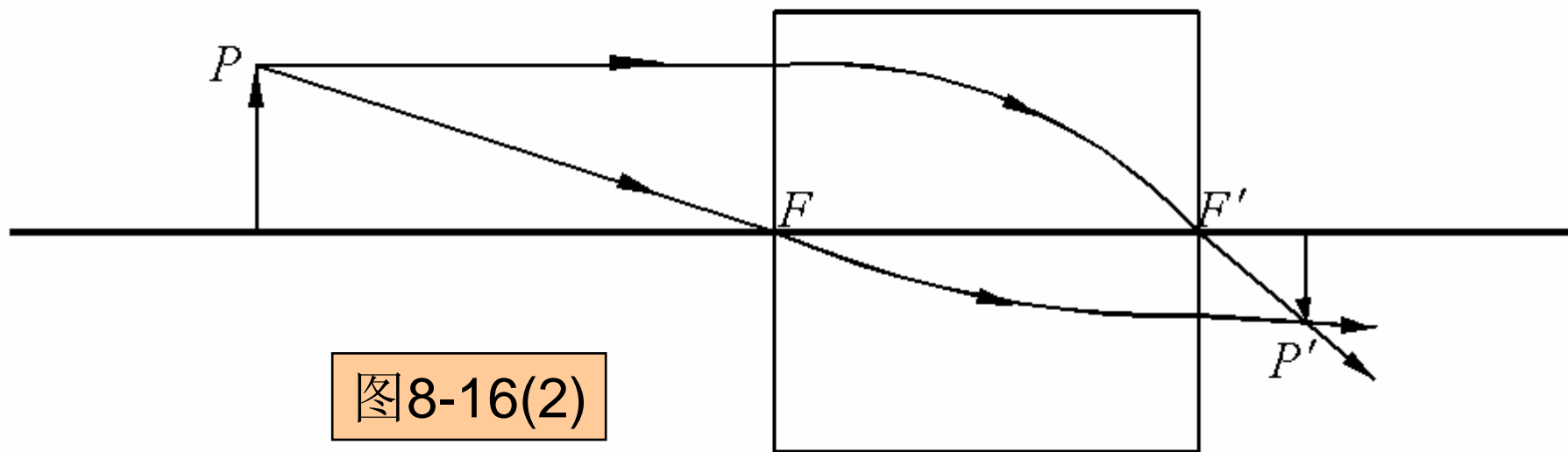


图8-16(2)

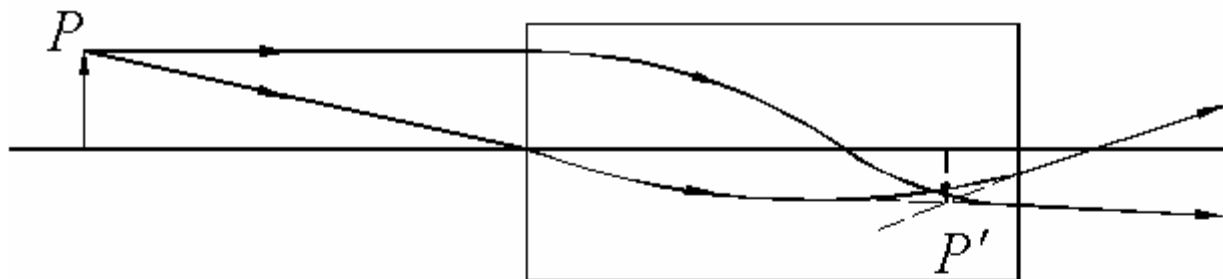
物总是位于物方焦点之外，倒立的实像。

利用这一情形，可制成超短焦距透镜，其 $f' = \frac{1}{n(0)\alpha}$ ，参见图8-15。

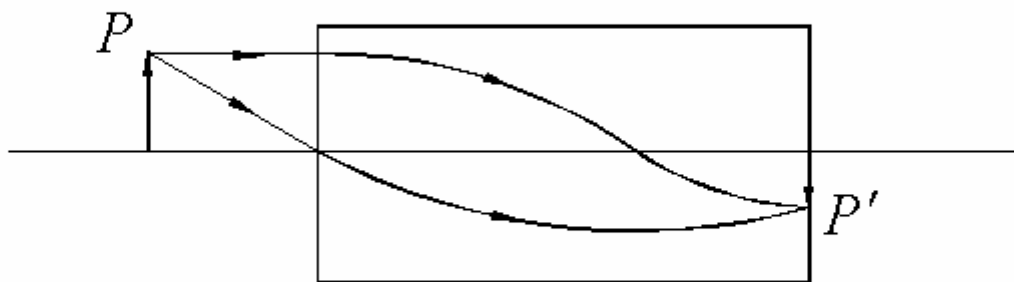
自聚焦透镜成像的各种情况

$$(3) \quad \frac{\pi}{2\alpha} < d < \frac{\pi}{\alpha}$$

(i) 点发出的光线在透镜内部相交，在外面看见倒立的虚像；



(ii) 在端面上成倒像；



(iii) 成倒立的实像。

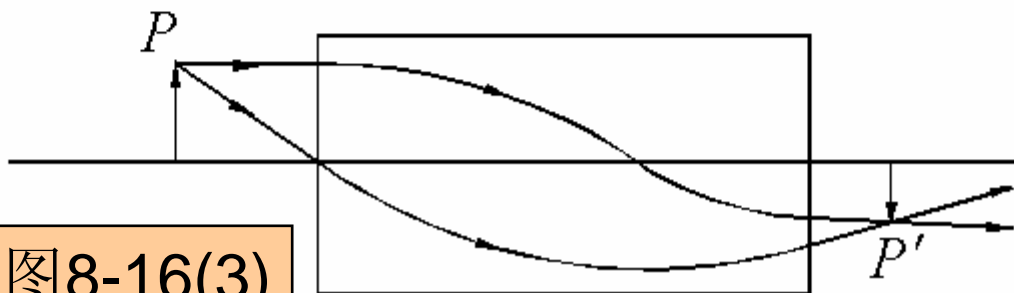
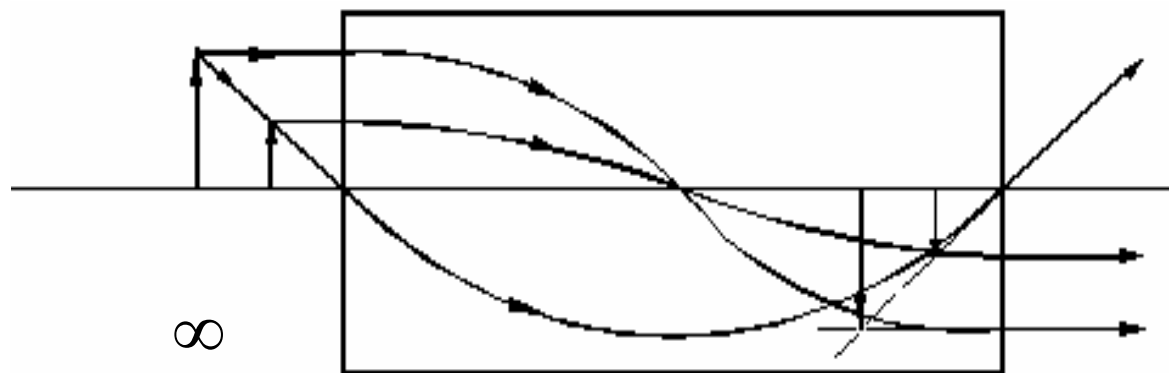


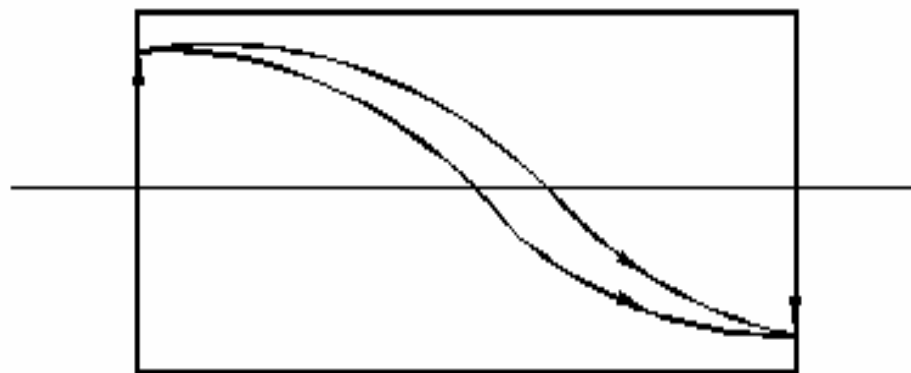
图8-16(3)

自聚焦透镜成像的各种情况

$$(4) \quad d = \frac{\pi}{\alpha}$$



(i) 倒立的虚像，横向放大率为-1，主平面在无穷远，焦距为 ∞ ；



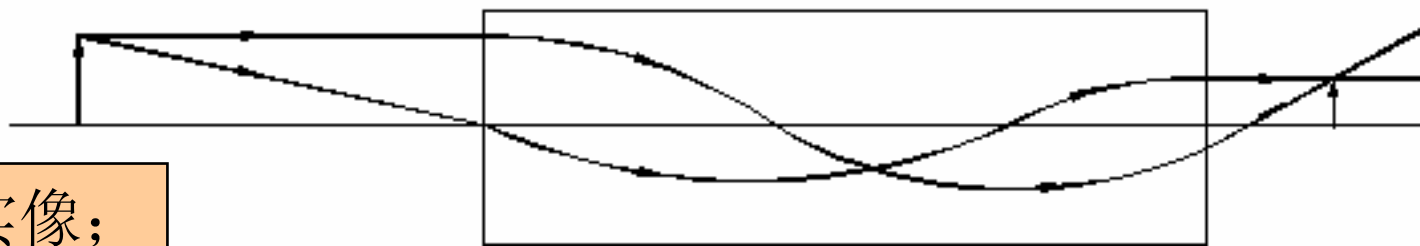
(ii) 两端面共轭，倒像，横向放大率为-1。

图8-16(4)

自聚焦透镜成像的各种情况

$$(5) \quad \frac{\pi}{\alpha} < d < \frac{3\pi}{2\alpha}$$

(i) 正立的实像;



(ii) 倒立的虚像。

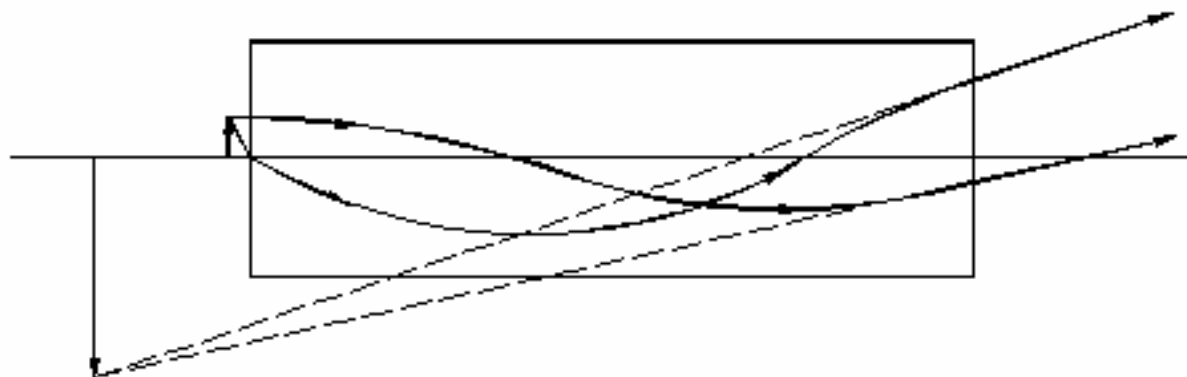


图8-16(5)

自聚焦透镜成像的各种情况

$$(6) \ d = \frac{3\pi}{2\alpha}$$

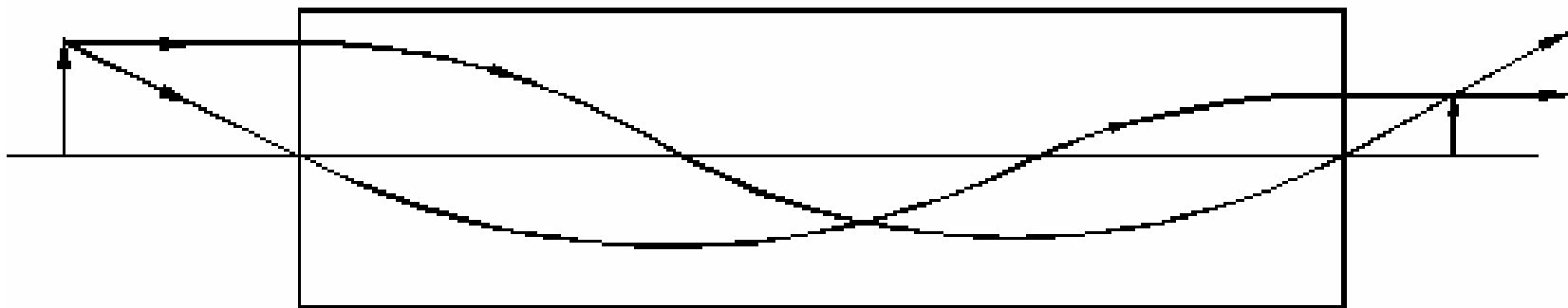


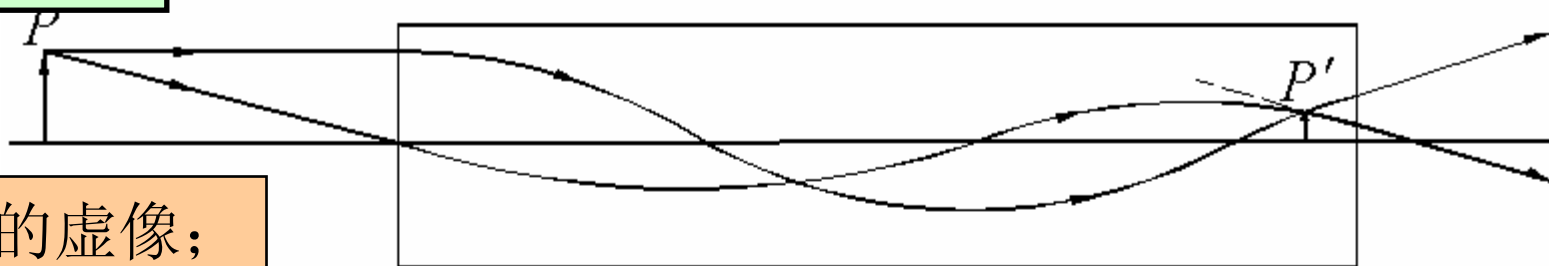
图8-16(6)

正立的实像。

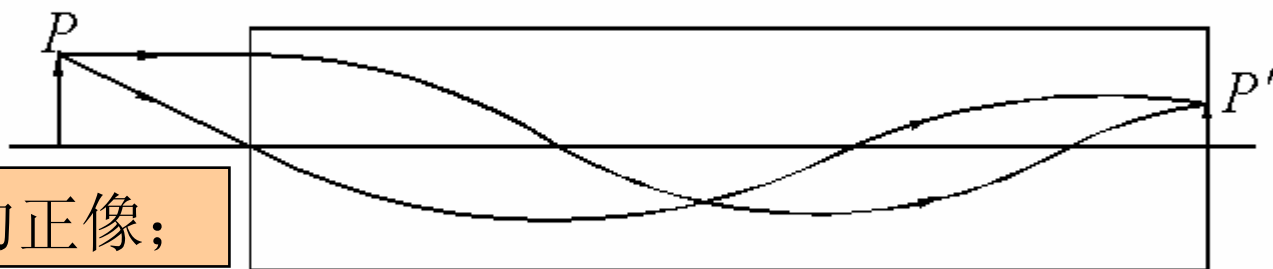
自聚焦透镜成像的各种情况

$$(7) \quad \frac{3\pi}{2\alpha} < d < \frac{2\pi}{\alpha}$$

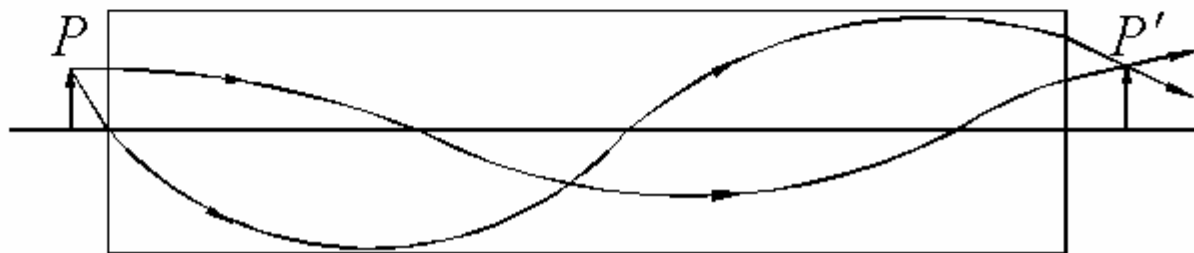
图8-16(7)



(i) 正立的虚像;



(ii) 端面上的正像;

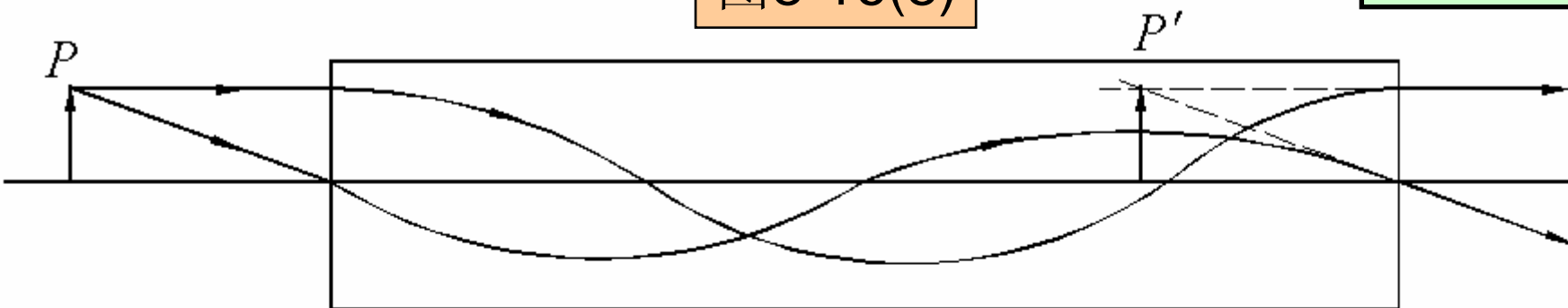


(iii) 正立的实像。

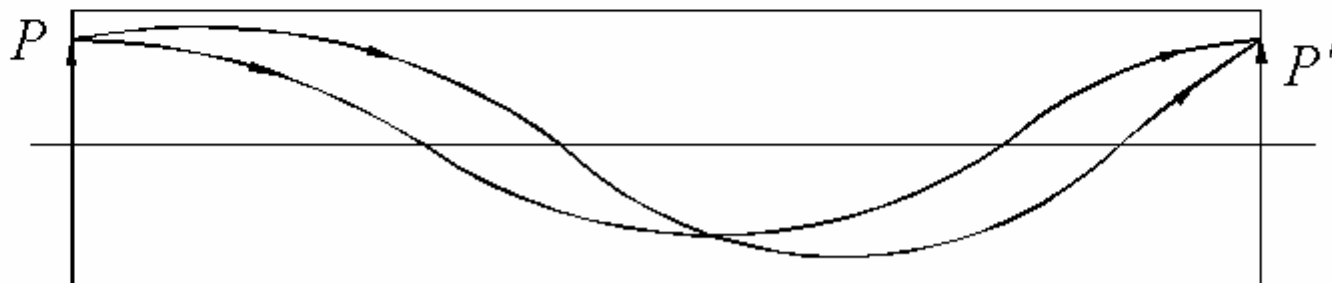
自聚焦透镜成像的各种情况

$$(8) \quad d = \frac{2\pi}{\alpha}$$

图8-16(8)



(i) 正立的虚像，横向放大率为1；



(ii) 两端面共轭，正像，横向放大率为1。

8.5

自聚焦透镜成像的矩阵表述

8.5 自聚焦透镜成像的矩阵表述

- 如图8-17所示是一块厚度为 d 的平板自聚焦透镜，它位于空气中，即它的前后都是空气。一孔径角为 u_1 的近轴光线以 h_1 的投射高度入射其上A点，在透镜内部走过余弦曲线AB后由B点射出境外。

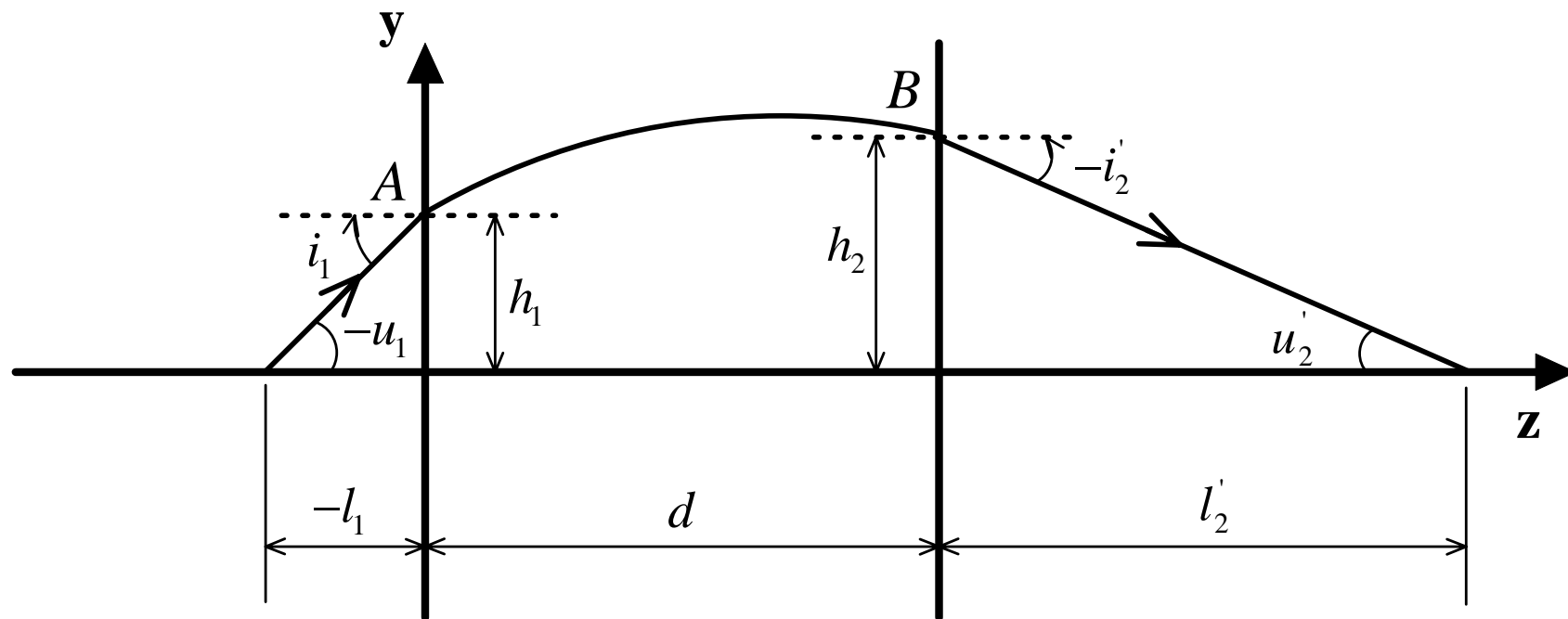


图8-17 自聚焦透镜对近轴光线的偏折

8.5 自聚焦透镜成像的矩阵表述

对于平板型自聚焦透镜，第一面的入射角 u_1 和物方孔径角 i'_2 ，

第二面的折射角 i_1 和像方孔径角 u'_2 分别有如下的关系：

$$\begin{cases} u_1 = -i_1 \\ u'_2 = -i'_2 \end{cases} \quad (8-49)$$

根据第二章中的约定，若将两个参考面分别与自聚焦透镜的前后

端面重合，则入射光线的列矩阵为 $\begin{pmatrix} h_1 \\ n_1 u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ u_1 \end{pmatrix}$ ，经透镜第一面

（即前端面）的折射后折射光线的列矩阵 $\begin{pmatrix} h'_1 \\ n'_1 u'_1 \end{pmatrix}$ 据式(2-)为

$$\begin{pmatrix} h'_1 \\ n'_1 u'_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{n'_1 - n_1} & 0 \\ \frac{1}{r_1} & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ u_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_1 \\ u_1 \end{pmatrix} \quad (8-50)$$

8.5 自聚焦透镜成像的矩阵表述

所以

$$n'_1 u'_1 = u_1 \quad (8-51)$$

据式(8-49)，在点A处折射角 i'_1 为

$$i'_1 = -u'_1 = -\frac{u_1}{n(y = h_1)} \quad (8-52)$$

其中 $n(y = h_1)$ 是A点处的梯度媒质折射率。又因为讨论的是近轴光线，所以取近似 $n(0) \approx n(y = h_1)$ 后有

$$i'_1 = -u'_1 \approx -\frac{u_1}{n(0)} \quad (8-53)$$

设在自聚焦透镜内部光线所走的余弦曲线为

$$y(z) = C \cos(\alpha z + \varphi_0) \quad (8-54)$$

8.5 自聚焦透镜成像的矩阵表述

将 $y(z=0) = h_1 = h'_1$, 及 $i'_1 = \frac{dy}{dz}(z=0)$ 代入有

$$\begin{cases} h'_1 = h_1 = C \cos \varphi_0 \\ i'_1 = -\alpha C \sin \varphi_0 \end{cases} \quad (8-55)$$

设在B点光线的投射高度为 h_2 , 则有

$$\begin{aligned} h_2 &= y(z=d) \\ &= C \cos(\alpha d + \varphi_0) \\ &= C \cos \varphi_0 \cos \alpha d - C \sin \varphi_0 \sin \alpha d \end{aligned} \quad (8-56)$$

将式(8-56)及式(8-53)代入得

$$h_2 = h'_1 \cos \alpha d - n(0)u'_1 \frac{\sin \alpha d}{n(0)\alpha} \quad (8-57)$$

8.5 自聚焦透镜成像的矩阵表述

同样，在B点光线的入射角 i_2 为

$$\begin{aligned} i_2 &= \frac{dy}{dz}(z=d) \\ &= -C\alpha \sin(\alpha d + \varphi_0) \\ &= -C\alpha \cos \varphi_0 \sin \alpha d - C\alpha \sin \varphi_0 \cos \alpha d \\ &= -\alpha h'_1 \sin \alpha d + i'_1 \cos \alpha d \\ &= -\alpha h'_1 \sin \alpha d - n(0)u'_1 \frac{\cos \alpha d}{n(0)} \end{aligned}$$

故

$$n(0)i_2 = -h'_1 \alpha n(0) \sin \alpha d - n(0)u'_1 \cos \alpha d = -n(0)u_2 \quad (8-58)$$

所以

$$\begin{pmatrix} h_2 \\ n(0)u_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha d & -\frac{\sin \alpha d}{n(0)\alpha} \\ \alpha n(0) \sin \alpha d & \cos \alpha d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h'_1 \\ n(0)u'_1 \end{pmatrix} \quad (8-59)$$

8.5 自聚焦透镜成像的矩阵表述

与得到式(8-50)的理由和过程完全类似，透镜内部的光线到达B点后，再经出射端面的折射，其出射光线 $\begin{pmatrix} h'_2 \\ u'_2 \end{pmatrix}$ 为

$$\begin{pmatrix} h'_2 \\ u'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} h_2 \\ n(0)u_2 \end{pmatrix} \quad (8-60)$$

将式(8-59)和式(8-50)代入上式，就得出了经自聚焦透镜作用后，出射光线与入射光线的关系为

$$\begin{pmatrix} h'_2 \\ u'_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \alpha d & -\frac{\sin \alpha d}{n(0)\alpha} \\ \alpha n(0) \sin \alpha d & \cos \alpha d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} h_1 \\ u_1 \end{pmatrix} \quad (8-61)$$

8.5 自聚焦透镜成像的矩阵表述

上式中的方阵就是自聚焦透镜的近轴作用矩阵M，即

$$M = \begin{pmatrix} \cos \alpha d & -\frac{\sin \alpha d}{n(0)\alpha} \\ \alpha n(0) \sin \alpha d & \cos \alpha d \end{pmatrix} \quad (8-62)$$

由式(8-61)可见， h_1 和 u_1 成比例变化时，由于式(8-61)是线性关系，所以 h'_2 和 u'_2 也以同样的比例变化，即的比值 $l'_2 = \frac{h'_2}{u'_2}$ 不变，说明自聚焦透镜对近轴光的成像是完善的。

在式(8-61)中，令 $u_1 \rightarrow 0$ ，则有

$$u'_2 = h_1 \alpha n(0) \sin \alpha d \quad (8-63)$$

8.5 自聚焦透镜成像的矩阵表述

所以平板自聚焦透镜的焦距为

$$f' = \frac{h_1}{u'_2} = \frac{1}{\alpha n(0) \sin \alpha d} = \frac{1}{m_{21}} \quad (8-64)$$

其中, m_{21} 是平板自聚焦透镜作用矩阵 M 的一个元素。焦点离开第二面的距离为

$$l'_F = \frac{h'_2}{u'_2} = \frac{1}{\alpha n(0)} \operatorname{ctg} \alpha d \quad (8-65)$$

其间已利用了当 $u_1 \rightarrow 0$ 时, 由式 (8-61) 所得的 $h'_2 = h_1 \cos \alpha d$ 。由式 (8-64) 和式 (8-65) 可得出平板自聚焦透镜像方主平面的位置为

$$l'_H = l'_F - f' = -\frac{\operatorname{tg} \frac{\alpha d}{2}}{\alpha n(0)} \quad (8-66)$$

与式 (8-48) 一致。

8.5 自聚焦透镜成像的矩阵表述

显然，平板自聚焦透镜对光线的作用与板厚 d 密切相关，在这里考察几个特殊情况：

一个是当 $d = \frac{\pi}{2\alpha}$ 时，平板自聚焦透镜的作用矩阵 $M_{d=\frac{\pi}{2\alpha}}$ 为

$$M_{d=\frac{\pi}{2\alpha}} = \begin{pmatrix} 0 & -\frac{1}{\alpha n(0)} \\ \alpha n(0) & 0 \end{pmatrix} \quad (8-67)$$

此时平板自聚焦透镜的焦距为

$$f'_{d=\frac{\pi}{2\alpha}} = \frac{1}{m_{21}} = \frac{1}{\alpha n(0)} \quad (8-68)$$

这就是超短焦距的情形。

8.5 自聚焦透镜成像的矩阵表述

例如，某一种梯度折射率媒质的折射率分布近似为 $n = 1.5 - 0.20056r^2$ 相当于它的 $n(0)$ 和 α 分别是 $n(0) = 1.5$ ， $\alpha = 0.5171$ 。用这种材料做成平板自聚焦透镜，当板厚 d 为 $\frac{\pi}{2\alpha} = 3.038\text{mm}$ 时，它的焦距只有 $f' = 1.29\text{mm}$ ，可见其焦距是很短的。

另一个情形是当 $d = \frac{\pi}{\alpha}$ 时，有

$$M_{d=\frac{\pi}{\alpha}} = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (8-69)$$

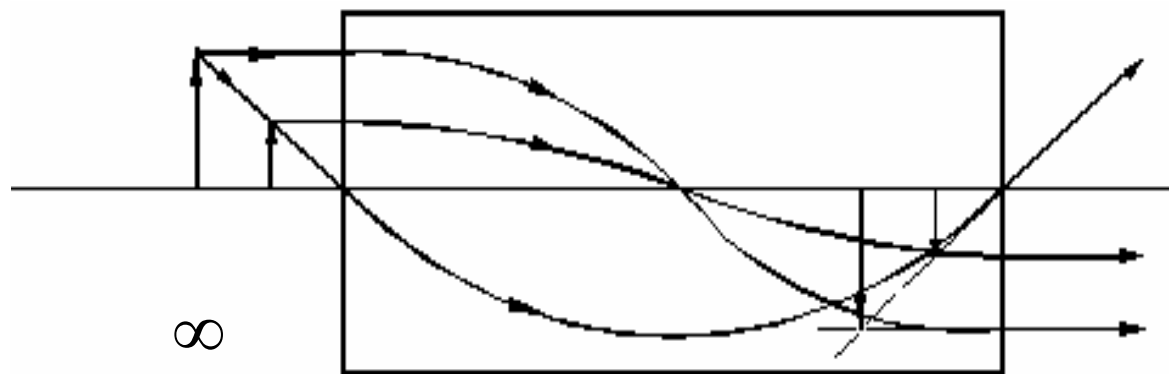
此时，平板自聚焦透镜是一个无焦系统，即

$$\begin{cases} f' = \infty \\ l'_H = \infty \end{cases} \quad (8-70)$$

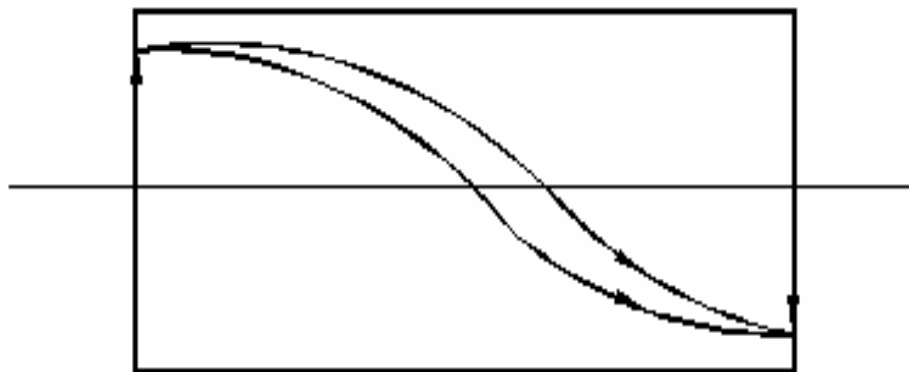
8.5 自聚焦透镜成像的矩阵表述

这就是图8-16(4)中所示的情形。

$$(4) \quad d = \frac{\pi}{\alpha}$$



(i) 倒立的虚像，横向放大率为-1，
主平面在无穷远，焦距为 ；



(ii) 两端面共轭，倒像，横向放大率为-1。

8.5 自聚焦透镜成像的矩阵表述

在静电复印机中，往往需要光学系统成 $1\times$ 倍的实像，因为自聚焦透镜的主平面可以做到在透镜外，因此可以实现成+1倍实像。事实上让式(8-66)大于零，求出自聚焦透镜的合适厚度 d 即可。即令

$$l'_H = l'_F - f' = -\frac{tg \frac{\alpha d}{2}}{\alpha n(0)} > 0 \quad (8-71)$$

因为 α 和 $n(0)$ 总是大于零的正数，所以取 $tg \frac{\alpha d}{2} < 0$ 即可满足上式的要求，所以

$$\frac{\pi}{2} < \frac{\alpha d}{2} < \pi$$

即

$$\pi < \alpha d < 2\pi \quad (8-72)$$

8.5 自聚焦透镜成像的矩阵表述

考虑到正切函数的周期性，一般解为

$$(2k - 1)\pi < \alpha d < 2k\pi \quad (8-73)$$

其中， k 是正整数。若乃取 $\alpha \sim 0.5$ ，可估算出自聚焦透镜的最小厚度约为 10mm 左右， $+1\times$ 倍实像的共轭距也大致在这个范围内，可见在复印机中利用自聚焦透镜在缩小整个系统的空间上有很大的优势。

8.5 自聚焦透镜成像的矩阵表述

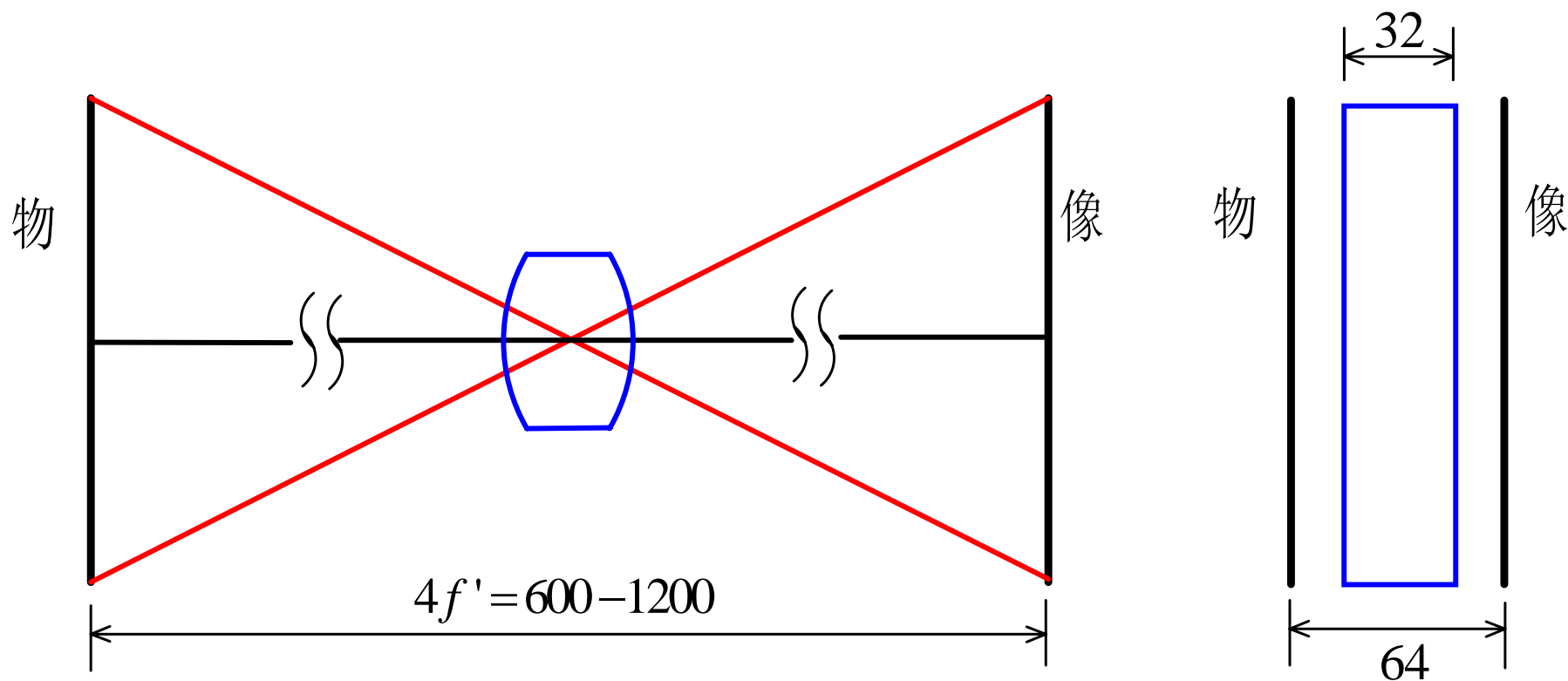


图8-18 普通均匀媒质球面光学透镜(左)与自聚焦透镜(右)1:1成像时共轭距的比较(单位是mm)