第二章

近 轴 光 学

(球面和共轴球面系统)

2.1近轴范围和近轴光线

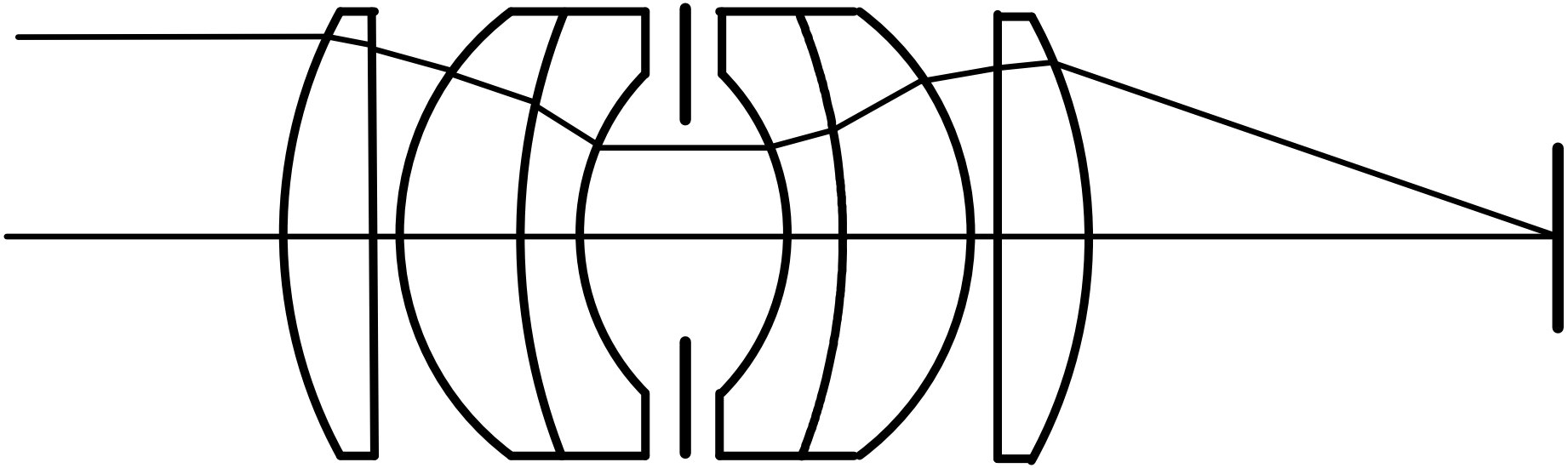


图2-1 一个普通照相镜头的结构

1、近轴范围

$$z=\frac{1}{2}ch^2+\frac{1}{8}c^3h^4+\frac{1}{16}c^5h^6+\ldots\ldots \qquad (1\text{-}47)$$

$$z=\frac{1}{2}ch^2+\frac{1}{8}(1+k)c^3h^4+\frac{1}{16}(1+k)^2c^5h^6+\ldots\ldots \qquad (1\text{-}51)$$

$$z=\frac{ch^2}{1+\sqrt{1-\varepsilon(ch)^2}}+a_4h^4+a_6h^6+a_8h^8+a_{10}h^{10}\ldots \qquad (1\text{-}52)$$

$$(h^2=x^2+y^2)$$

近轴范围

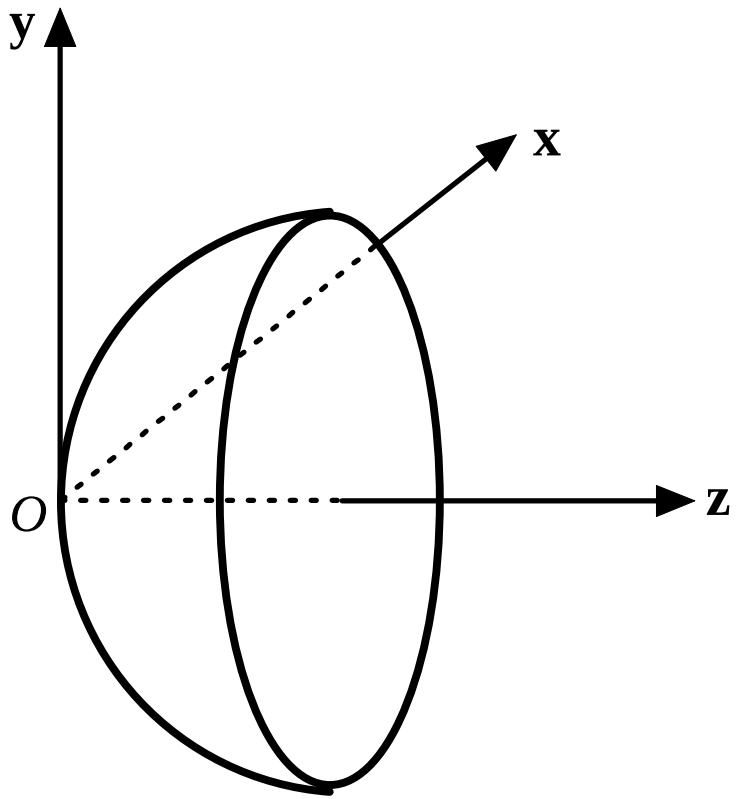


图2-2　透镜曲面方程所采用的坐标系

在光学系统的近轴范围内，其折射面或反射面的面形可以由下式表示

$$z = \frac{1}{2}ch^2 \tag{2-1}$$

近轴范围

现以球面为例看看这个近轴球面定义的实质，由球面方程式(1-44)考查比较直接。在式(1-44)中如果h与r 相比很小，允许取近似 $\sqrt{1-x} \approx 1-\frac{x}{2}$，则有

$$z = r\{1-\sqrt{1-(\frac{h}{r})^2}\} = r\{1-(1-\frac{h^2}{2r^2})\} = \frac{1}{2}ch^2$$

其中，$c = \frac{1}{r}$ 。即在近轴范围里，允许作$\sqrt{1-x} \approx 1-\frac{x}{2}$ 这种近似。参看图2-3所示，它是一个近轴球面，h 远小于近轴球面半径r 。

近轴范围

$$\frac{h}{r} = Sin\varphi \approx \varphi$$

$$\sqrt{1-(\frac{h}{r})^2} \approx 1-\frac{1}{2}\varphi^2$$

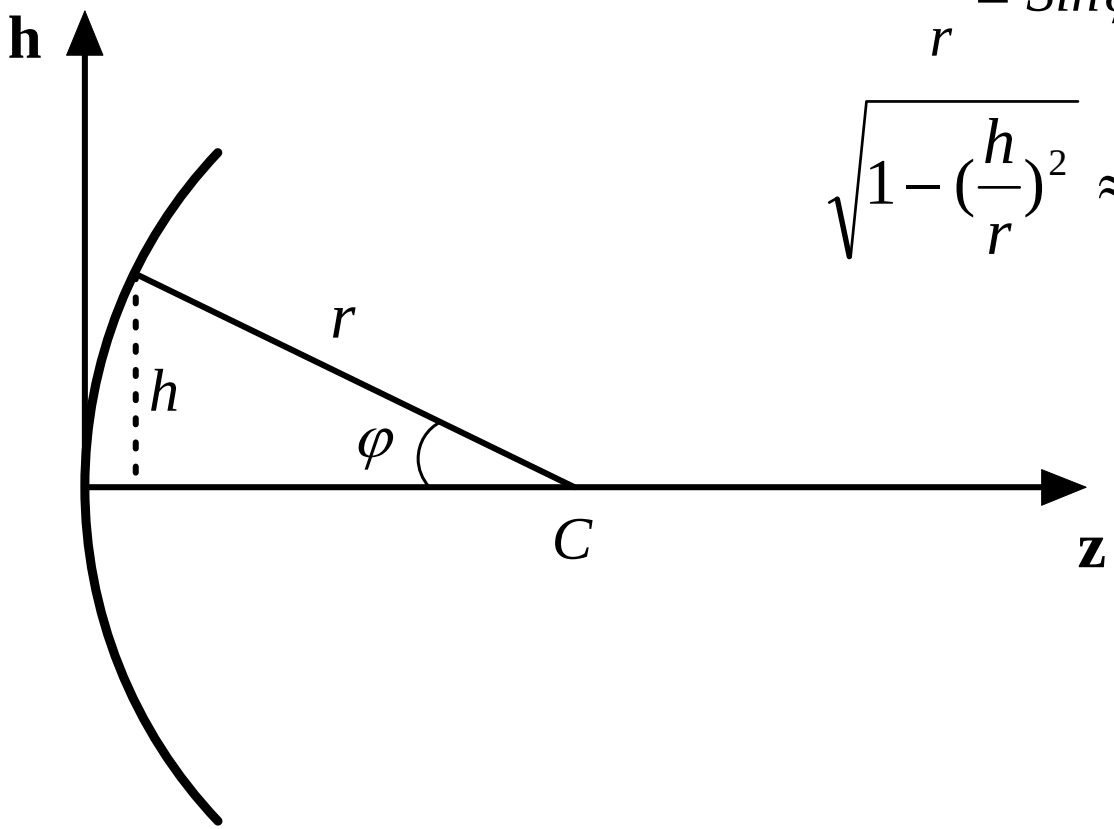


图2-3　近轴范围

2、近轴光线

入射到近轴球面上并与光轴（z 轴）的夹角很小的光线称为近轴光线。

设近轴光线与光轴的夹角为 θ：

$$Sin\theta \approx \theta$$

$$tg\theta \approx \theta$$

$$Cos\theta \approx 1$$

3、近轴光学的符号规则及名词术语

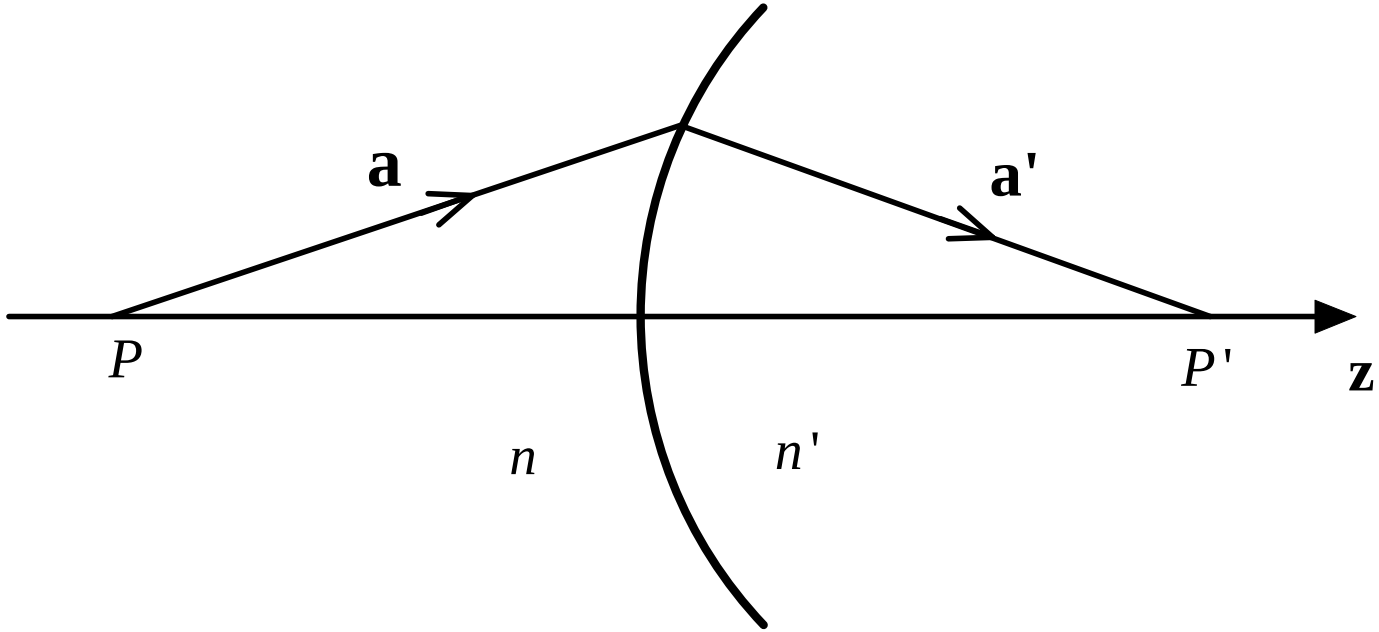


图2-4　近轴光线在近轴球面上的折射

近轴光学的符号规则及名词术语

u ：物方孔径角， L ：物方截距；
u’：像方孔径角， L’：像方截距。

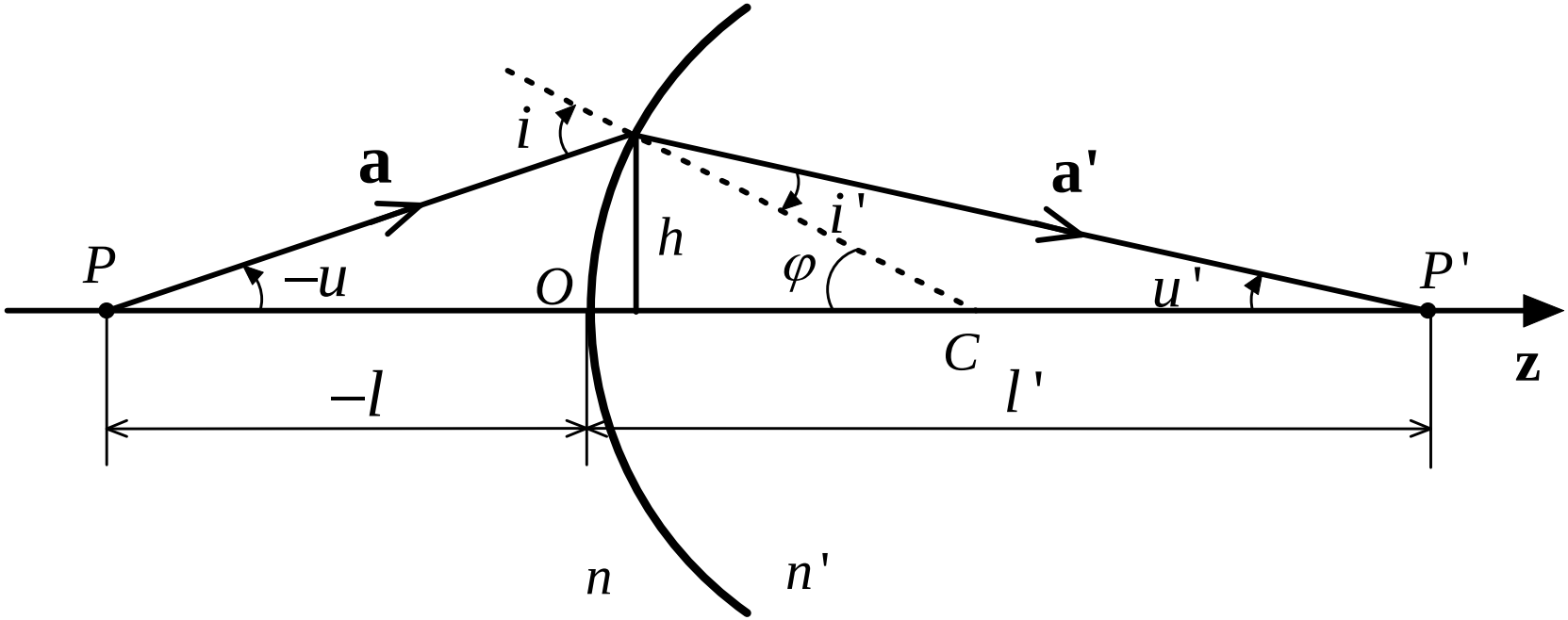


图2-5 近轴光线各参量（坐标）正负的标注

近轴光学的符号规则及名词术语

正负号规定

(1). 线段：轴向线段与数学坐标兼容，以近轴球面顶点为原点，左方线段为负、右方线段为正，如上述；垂轴线段也与数学坐标兼容，即光轴上方的线段为正，光轴下方的线段为负；

(2). 球面半径r：与数学坐标兼容，以球面顶点为原点，球心在顶点右边者取正值，球心在顶点左边者取负值；

(3). 角度：角度以锐角度量，其符号规则与数学坐标不同。孔径角以光轴起算转向光线，顺时针旋转取正值(如图2-5所示的像方孔径角u')，逆时针旋转取负值(如图2-5所示的物方孔径角u)；光线的入射角和折射角则以光线起算转向法线，顺时针旋转为正值，逆时针旋转取负值。

2.2
单个近轴球面的性质

2.2单个近轴球面的性质

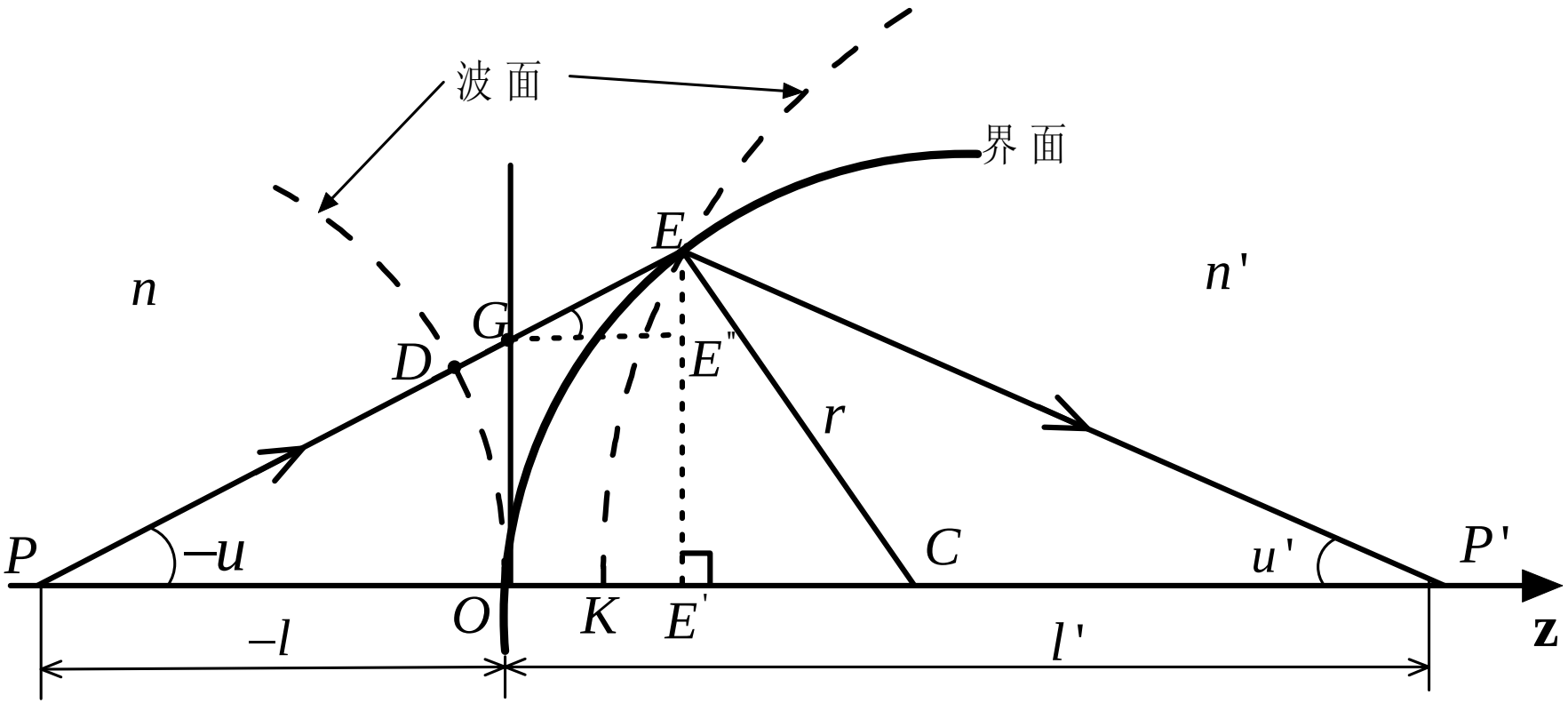


图2-6　由费马原理到近轴成像

2.2单个近轴球面的性质

$$[PDGEP'] = [POKP'] \qquad (2\text{-}2)$$

由于D和O在同一波面上，所以$[PD] = [PO]$

根相同的理由，有 $[EP'] = [KP']$

因为有

$$[PDGEP'] = [PD] + [DG]) + [GE] + [EP']$$

和

$$[POKP'] = [PO] + [OK] + [KP']$$

将上述这些结果代入式(2-2)，有

$$[OK] = [DG] + [GE] \qquad (2\text{-}3)$$

2.2单个近轴球面的性质

又因为是在近轴范围内讨论问题，所以椐式(2-1)有

$$GE \approx \frac{1}{2}ch^2 \tag{2-4}$$

这里C是近轴球面的曲率，即 $c = \frac{1}{r}$； $h = EE'$ ，称为入射光线在近轴球面上的投射高度。同样的理由，采取近轴近似有

$$DG \approx -\frac{1}{2} \cdot \frac{h^2}{l} \tag{2-5}$$

所以光从D走至E的光程为

$$[DGE] = \frac{1}{2}nh^2(c - \frac{1}{l}) \tag{2-6}$$

2.2单个近轴球面的性质

类此有

$$[OK]=\frac{1}{2}n'h^2(c-\frac{1}{l'}) \qquad (2\text{-}7)$$

将上述式(2-6)和式(2-7)代入由费马原理得到的式(2-3)有

$$n(c-\frac{1}{l})=n'(c-\frac{1}{l'}) \qquad (2\text{-}8)$$

或者

$$\boxed{\frac{n'}{l'}-\frac{n}{l}=(n'-n)c} \qquad (2\text{-}9)$$

近轴球面成像公式

2.2单个近轴球面的性质

又基于同样的理由，在近轴近似下，有

$$lu = l'u' = h \tag{2-10}$$

代入式(2-9)，得

$$\boxed{n'u' - nu = h(n' - n)c} \tag{2-11}$$

上式是近轴球面成像公式的另一种表述形式，以后会看到在某些情况下用它计算分析更为方便。

2.2单个近轴球面的性质

式(2-8)说明在近轴球面折射前后，物方的量$n(c-\frac{1}{l})$与像方的相应量$n'(c-\frac{1}{l'})$相等，即$n(c-\frac{1}{l})=n'(c-\frac{1}{l'})$，

说明它是一个不变量，几何光学中称它为阿贝(Abbe)不变量，即

$$\mathbf{A}=n(c-\frac{1}{l})=n'(c-\frac{1}{l'}) \qquad (2\text{-}12)$$

在式(2-8)的两端乘以入射光线的投射高度h，并利用式(2-10)有

$$n(ch-u)=n'(ch-u') \qquad (2\text{-}13)$$

2.2单个近轴球面的性质

如图2-5所示，上式中的 $(ch-u)$和$(ch-u')$分别是入射角和折射角，

即

$$\begin{cases} i=(ch-u) \\ i'=(ch-u') \end{cases} \tag{2-14}$$

所以由式（2-13）有

$$n'i'=ni \tag{2-15}$$

此式是小角度近似下的折射定律式(1-2)。$n(ch-u)=n'(ch-u')$
说明在近轴球面折射前后不变，它是另一个不变量，称为折射不变量，简记为B，即

$$\boxed{B=n(ch-u)=n'(ch-u')} \tag{2-16}$$

在像差理论中，不变量B是一个很重要的量。

2.2单个近轴球面的性质

利用式(2-10)可将式(2-14)写成

$$\begin{cases} i = (\dfrac{l}{r} - 1)u & (2\text{-}17) \\ i' = (\dfrac{l'}{r} - 1)u' & (2\text{-}18) \end{cases}$$

另将式(2-14)的二式相减可得

$$u' = u + i - i' \qquad (2\text{-}19)$$

并将式(2-18)改造为

$$l' = r + r\frac{i'}{u'} \qquad (2\text{-}20)$$

2.2单个近轴球面的性质

这样由式(2-17)、式(2-15)、式(2-19)和式(2-20)组成的四式构成了一套近轴光线的追迹公式，十分重要，使用时亦十分方便：

$$\begin{cases} i = (\dfrac{l}{r} - 1)u \\ i' = \dfrac{n}{n'} i \\ u' = u + i - i' \\ l' = r + r\dfrac{i'}{u'} \end{cases} \tag{2-21}$$

2.3
单个近轴球面成像的放大率

2.3单个近轴球面成像的放大率

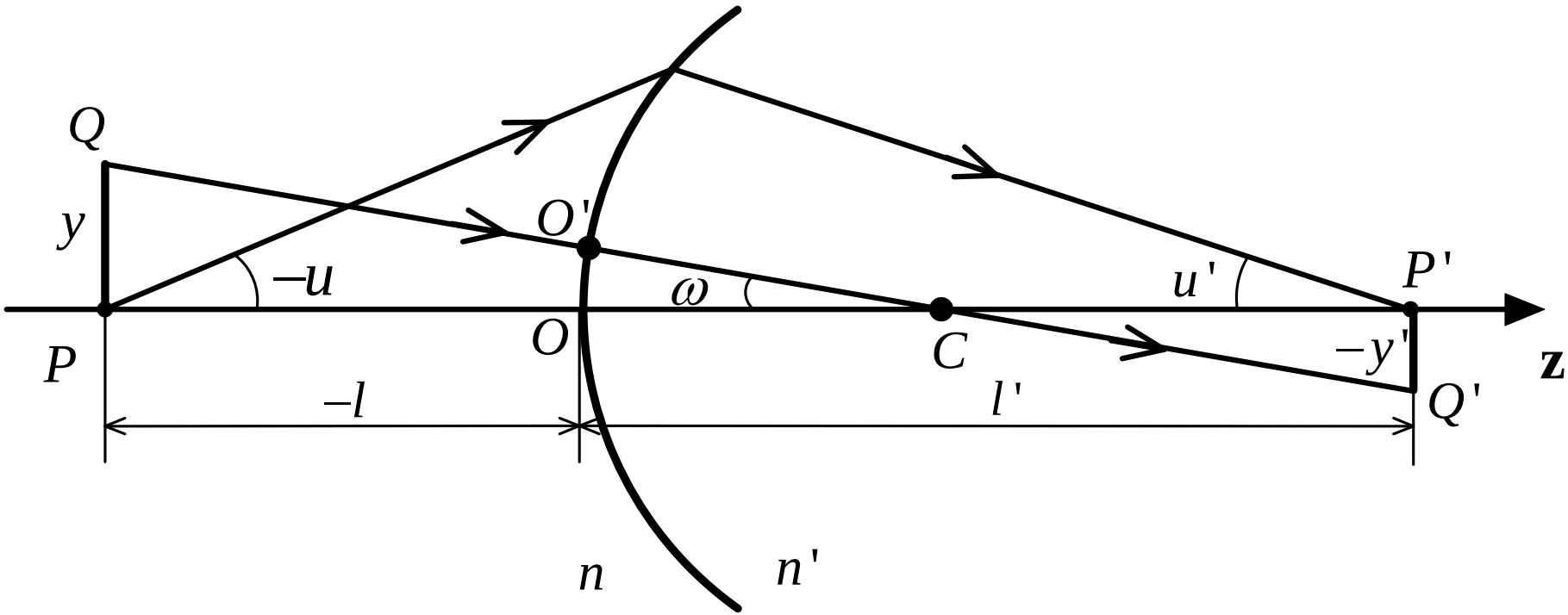


图2-7 近轴范围内轴外物点的成像

1、横向（垂轴）放大率

在图2-7中，由 $\Delta Q'P'C \infty \Delta QPC$ 有

$$\frac{-y'}{y} = \frac{l'-r}{-l+r}$$

即

$$\frac{y'}{y} = \frac{l'-r}{l-r} = \frac{nl'}{n'l} \tag{2-23}$$

上式中第二步利用了式(2-12)阿贝不变量的变形，即由

$$A = n(c - \frac{1}{l}) = n'(c - \frac{1}{l'})$$

有

$$n\frac{l-r}{l} = n'\frac{l'-r}{l'}$$

所以

$$\frac{nl'}{n'l} = \frac{l'-r}{l-r}$$

横向（垂轴）放大率

定义式(2-23)中左端之比，即像高与物高之比为单个近轴球面的横向放大率，有时也称垂轴放大率，用希腊字母β 表示，即

$$\beta = \frac{y'}{y} \tag{2-24}$$

在式(2-23)中代入式(2-10)可得一个更对称的横向放大率表示式，即

$$\boxed{\beta = \frac{nu}{n'u'}} \tag{2-25}$$

2、轴向放大率

现在讨论若物平面沿光轴方向移动一微小距离，看看像平面的移动情况，其定量关系可由微分式(2-9)得出。为避免与光学系统中表示厚度或间隔的字母 d 混淆，采用 δ 作为微分符号，即有

$$\delta\left(\frac{n'}{l'}-\frac{n}{l}\right)=\delta\{c(n'-n)\}\ =0$$

上式右端为零是由于 为常数，左端微分并作整理后得

$$\frac{\delta l'}{\delta l}=\frac{nl'^2}{n'l^2} \tag{2-26}$$

定义像平面移动量$\delta l'$与物平面移动量δl之比为轴向放大率，用希腊字母α表示，即

$$\alpha=\frac{\delta l'}{\delta l} \tag{2-27}$$

轴向放大率

利用式(2-23)，或式(2-24)和式(2-26)有

$$\alpha = \frac{n'}{n}\beta^2 \tag{2-28}$$

由这个关系式可以得到两点结论：第一点是，由于上式右端总是一个大于零的数，所以，对于单个近轴球面（系统），像平面的移动方向总是和物平面的移动方向一致，也就是说物平面向光轴正方向移动，相应的像平面也向光轴正方向移动；而当物平面沿逆光轴方向即向左移动时，相应的像平面也沿逆光轴方向移动。这一点由式(2-26)也看的很清楚，因为它总是一个正值。第二点是式(2-28)告诉我们，对于单个近轴球面而言，无论物体处于什么位置，横向放大率和轴向放大率一般并不相等，说明一个立方体经一个近轴球面成像后并不是一个立方体。

3、角放大率

从光路图2-7看到，由物点追踪计算了一条近轴光线得到了像点后，随之像方截距与物方截距之比就确定了，同时像高与物高之比也就定了。这时也可以确定出像方孔径角与物方孔径角之比，因为椐式(2-10)有

$$\frac{u'}{u}=\frac{l}{l'} \tag{2-29}$$

通常将入射光线和相应的折射光线称为一对共轭光线，共轭光线与光轴夹角之比定义为角放大率，用希腊字母表示，即

$$\gamma=\frac{u'}{u} \tag{2-30}$$

利用式(2-25)有

$$\boxed{\gamma=\frac{n}{n'}\cdot\frac{1}{\beta}} \tag{2-31}$$

4、三个放大率之间的关系

将式(2-28)和式(2-31)的两端分别相乘得

$$\alpha \cdot \gamma = \beta \tag{2-32}$$

上式是横向放大率、轴向放大率、角放大率三者之间的关系。

5、光学不变量

由式(2-24)和式(2-25)易得

$$nuy = n'u'y' \tag{2-33}$$

此式的物理含义是，在近轴球面折射前后或说成像前后，折射率、孔径角、物（像）高三者乘积是不变的。通常将这个不变量称为光学不变量，亦称拉赫不变量，用大写字母 J 表示，即

$$\boxed{J = nuy = n'u'y'} \tag{2-34}$$

2.4
近轴球面系统中的近轴光线追迹

2.4近轴球面系统中的近轴光线追迹

实际的光学系统往往是由多个折(反)射面串联在一起组成的，而且各个折（反）射面的对称轴是共同的，即为*共轴光轴系统*。下面的讨论都是针对共轴系统的。对于共轴系统，近轴光线的计算可以一面一面的逐次计算。因为从第一面开始可以将前一面计算出的像点作为下一面的物点，利用式(2-9)或式(2-21)循环计算，直至最后一个折射面。其间要解决好两个问题，一是随着前一面计算结束向后一面过渡时应将坐标原点同时从从前一面的顶点移到后一面的顶点，即坐标原点一定是当前计算面的顶点；二是要建立前一面计算结果与后一面起算数椐之间的联系。

1、近轴球面系统的成像

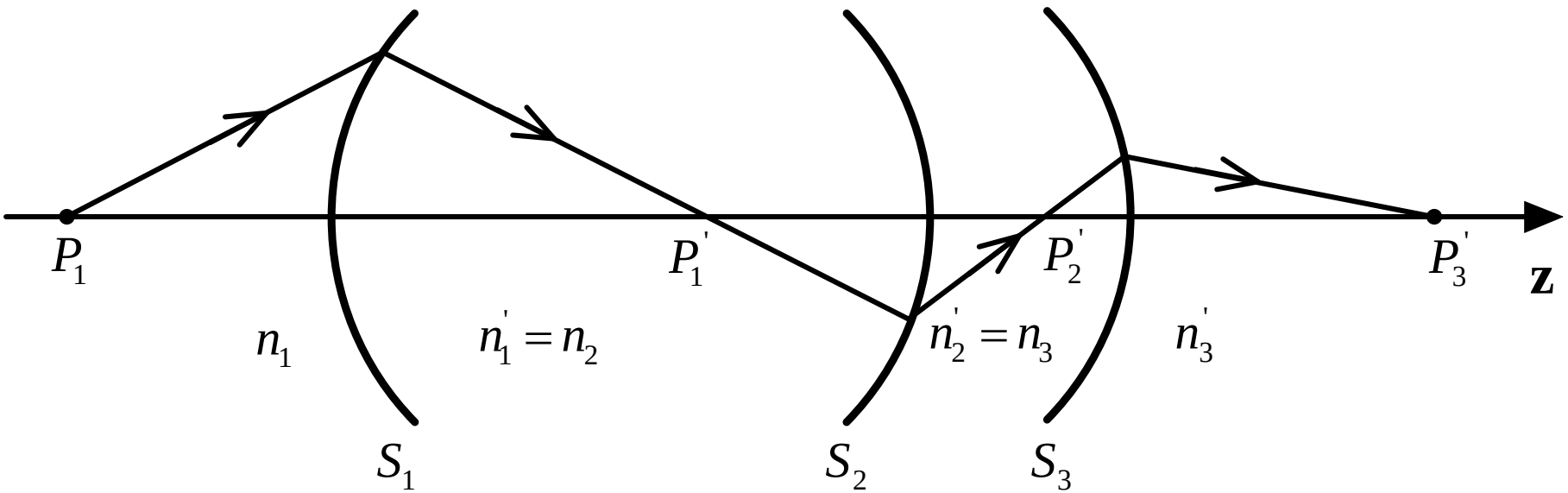


图2-8 三个共轴的近轴球面组成的系统

2、近轴光学计算中的转面公式

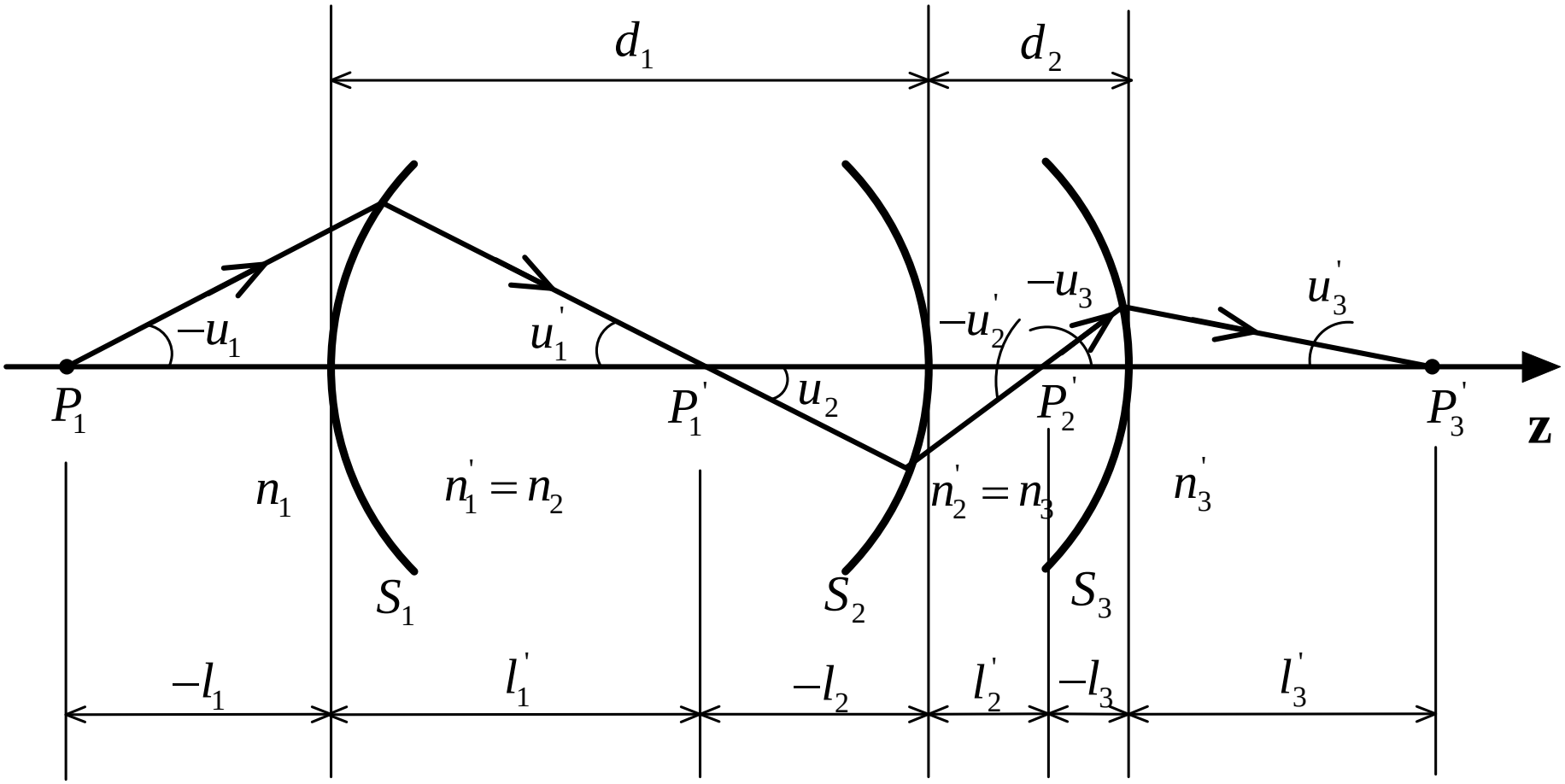


图2-9　转面数据间的关系

近轴光学计算中的转面公式

从图2-9显见下一面计算需要的起算数椐是 l_2、u_2，它们与两近轴球面间的间隔 d_1，以及 l_1'、u_1' 的关系为

$$l_2 = l_1' - d_1$$

$$u_2 = u_1'$$

还有第一面的像方折射率即是第二面的物方折射率，即

$$n_2 = n_1'$$

这三个式子即为由第一面计算向第二面计算过渡的转面公式，写成一般的形式是

$$\begin{cases} l_{i+1} = l_i' - d_i \\ u_{i+1} = u_i' \\ n_{i+1} = n_i' \end{cases} \qquad (2\text{-}35)$$

近轴光学计算中的转面公式

如果用式(2-11)作近轴光线的追踪计算，则相应的转面公式为

$$h_{i+1} = h_i - d_i u_i' \tag{2-36}$$

这是式(2-35)的变形，显然在式(2-35)的第一式两端同乘并将第二个式子代入，然后利用 $h_i = l_i u_i = l_i' u_i'$，即得上式。从光路图2-9和图2-10上，也可以得到这个转面公式。

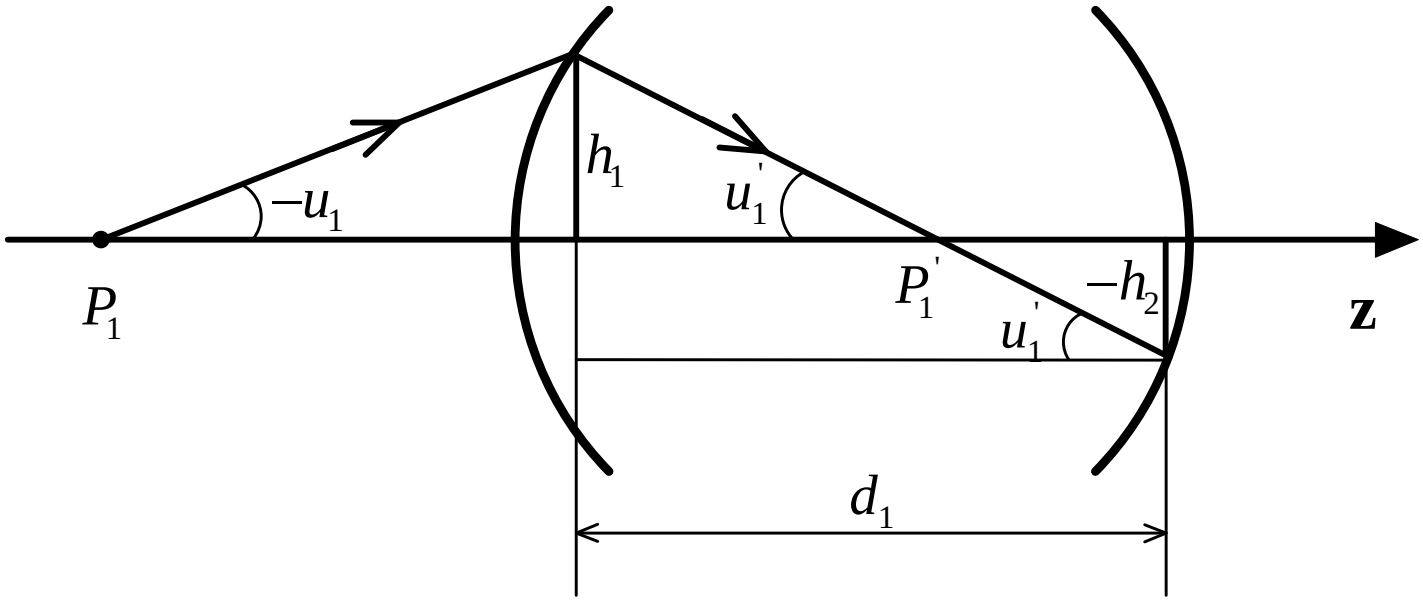


图2-10　转面关系

3、近轴球面系统的放大率

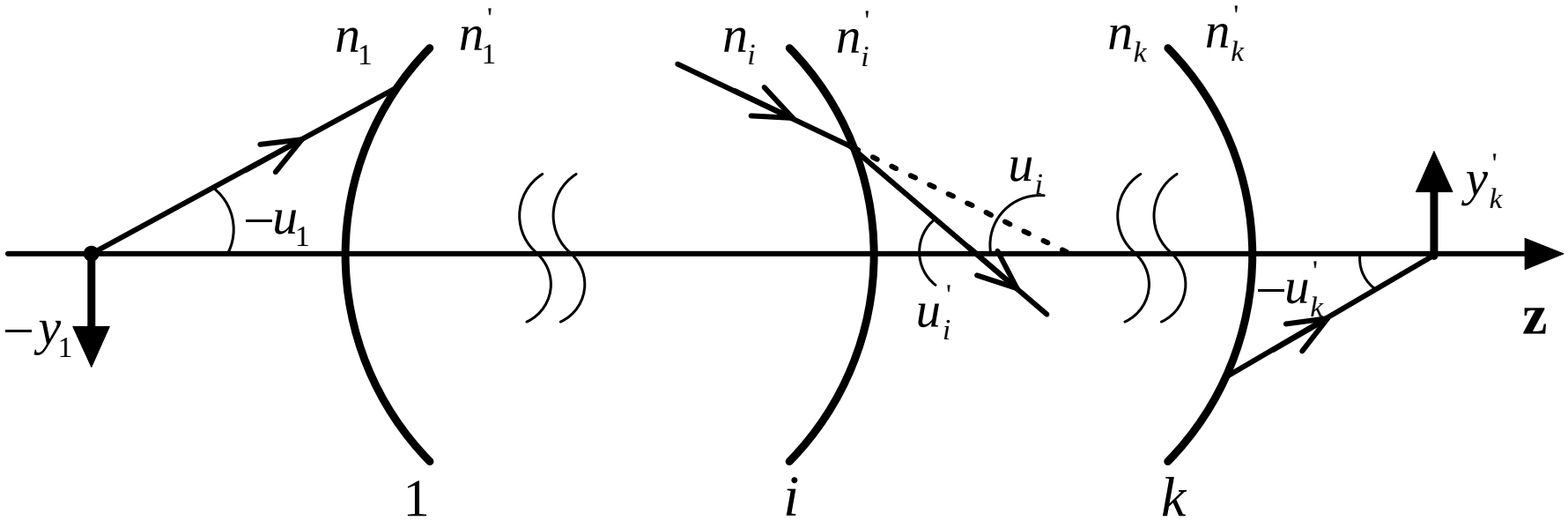


图2-11 近轴球面系统

近轴球面系统的放大率

(1). 横向放大率β

定义系统的像高y'与物高y之比为横向放大率，即

$$\beta = \frac{y'}{y} \tag{2-37}$$

由于第一面的物即系统的物，最后一面的像是整个系统的像；前一面的像即为后一面的物。所以有

$$\begin{cases} y_1 = y \\ y'_k = y' \\ y'_{i-1} = y_i \end{cases}$$

进而有

$$\frac{y'}{y} = \frac{y'_k}{y_k} \cdot \frac{y'_{k-1}}{y_{k-1}} \cdots \frac{y'_i}{y_i} \cdots \frac{y'_1}{y_1} \tag{2-38}$$

近轴球面系统的放大率

式(2-38)告诉我们整个系统的横向放大率是系统每一面横向放大率的乘积，即

$$\beta = \beta_k \cdot \beta_{k-1} \ldots \beta_i \ldots = \beta_1 \qquad \prod_{i=1}^{k} \beta_i \qquad (2\text{-}39)$$

将单个近轴球面的横向放大率公式(2-25)和转面公式(2-35)中的后两式代入(2-39)式有

$$\beta = \frac{n_1 u_1}{n'_k u'_k} \qquad (2\text{-}40)$$

近轴球面系统的放大率

(2). 轴向放大率 α

设物平面沿光轴方向微量移动了 δl ，相应地像平面沿光轴移动了 $\delta l'$，定义像平面的移动量 $\delta l'$ 与物平面移动量 δl 之比为轴向放大率，即

$$\alpha = \frac{\delta l'}{\delta l} \tag{2-41}$$

由于

$$\frac{\delta l'}{\delta l} = \frac{\delta l'_k}{\delta_k} \cdot \frac{\delta l'_{k-1}}{\delta l_{k-1}} \cdots \frac{\delta l'_i}{\delta l_i} \cdots \frac{\delta l'_1}{\delta l_1} \tag{2-42}$$

这里利用了

$$\begin{cases} \delta l_1 = \delta l \\ \delta l'_k = \delta l' \\ \delta l_{i+1} = \delta l'_i \end{cases}$$

其中第三式是将转面关系式(2-35)的第一式两端微分后得到的。

近轴球面系统的放大率

式(2-42)的含义是系统的轴向放大率是各面轴向放大率的乘积，即

$$\alpha = \prod_{i=1}^{k} \alpha_i \qquad (2\text{-}43)$$

将式(2-28)代入有

$$\alpha = \frac{n'_k}{n_k}\beta_k{}^2 \cdot \frac{n'_{k-1}}{n_{k-1}}\beta_{k-1}{}^2 \cdots \frac{n'_i}{n_i}\beta_i{}^2 \cdots \frac{n'_1}{n_1}\beta_1{}^2$$

$$= \frac{n'_k}{n_1}\left(\prod_{i=1}^{k}\beta_i\right)^2$$

$$= \frac{n'_k}{n_1}\beta^2 \qquad (2\text{-}44)$$

近轴球面系统的放大率

(3). 角放大率

如图2-11所示，在追踪的近轴光线中，取出入射光线与光轴所夹的孔径角 u 和与其其轭的出射光线与光轴所夹的孔径角 u' ，定义后者对前者之比为系统的角放大率，即

$$\gamma = \frac{u'_k}{u_1} \tag{2-45}$$

利用转面公式 $u'_i = u_{i+1}$ ，有

$$\gamma = \frac{u'_k}{u_k} \cdot \frac{u'_{k-1}}{u_{k-1}} \cdots \frac{u'_i}{u_i} \cdots \frac{u'_1}{u_1} = \prod_{i=1}^{k} \gamma_i \tag{2-46}$$

即整个近轴光学系统的角放大率是各面角放大率的乘积。

近轴球面系统的放大率

(4). 三个放大率之间的关系

将式(2-45)的两端与式(2-44)的两端分别相乘，并将式(2-40)代入则得 α、β 和 γ 这三个放大率之间的关系，
即

$$\alpha\gamma = \beta \tag{2-47}$$

它与单面的关系式类似。

近轴球面系统的放大率

(5). 光学(拉赫)不变量

利用转面关系式(2-35)和关系式 $y'_{i-1} = y_i$，可以将单个折射面的光学(拉赫)不变量式（2-34）推广到整个系统中，即在系统的任一面折射前后折射率、孔径角与物（像）高三者乘积不变，即

$$J = n_i u_i y_i = n'_i u'_i y'_i \quad (i = 1, 2, \ldots\ldots, K) \qquad (2\text{-}48)$$

再次说明，每个近轴球面的作用基本上是将这个光学(拉赫)不变量在孔径角和物（像）高之间重新分配，这里说基本二字是暂且没有计入折射率这个因素。

近轴球面系统的放大率

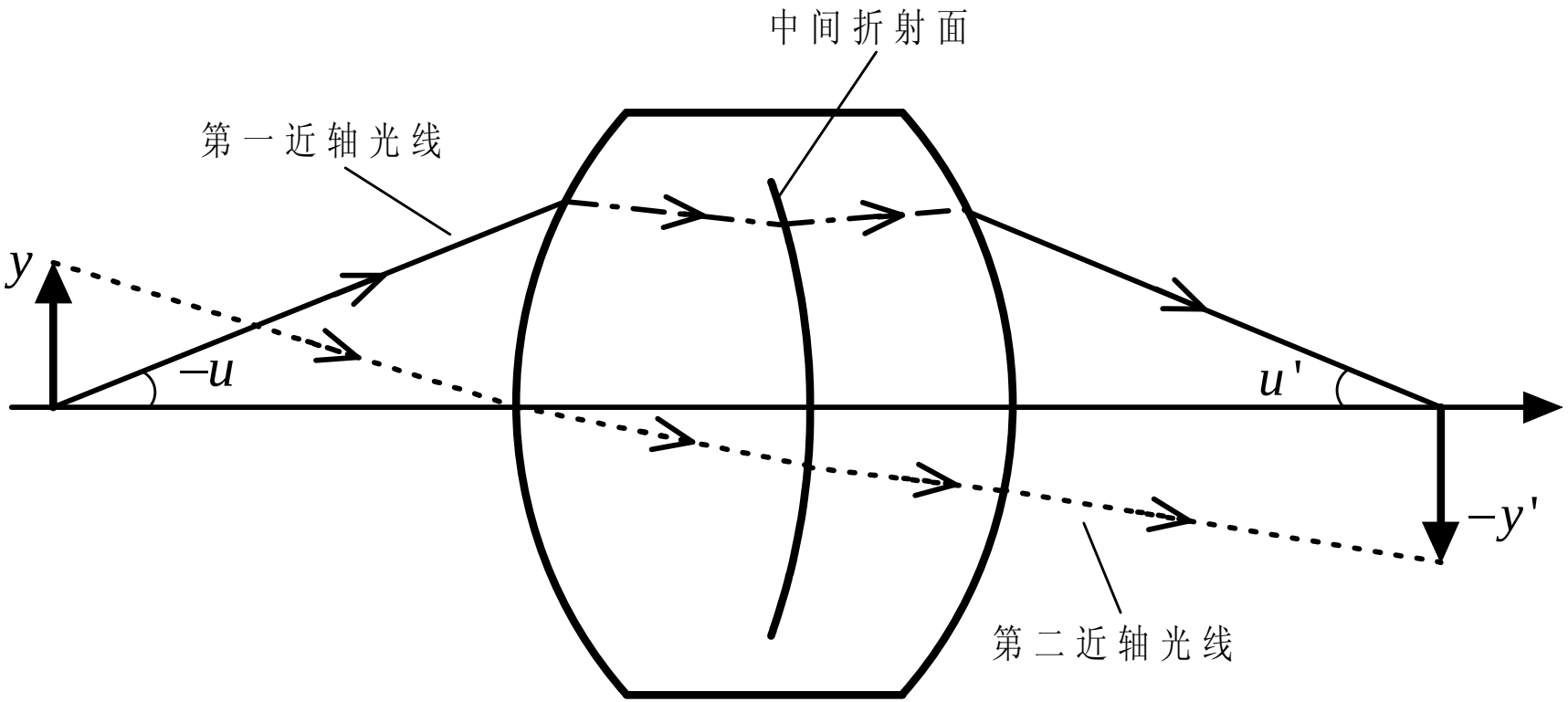


图2-12　第一近轴光线和第二近轴光线

近轴球面系统的放大率

根椐近轴成像公式(2-11)，我们有

$$\begin{cases} n_i'u_i' - n_iu_i = h_i(n_i' - n_i)c_i \\ n_{pi}'u_{pi}' - n_{pi}u_{pi} = h_{pi}(n_i' - n_i)c_i \end{cases} \tag{2-49}$$

在上述二式中消去共公因子 $(n_i' - n_i)c_i$ ，并经整理得

$$n_iu_ih_{pi} - n_iu_{pi}h_i = n_i'u_i'h_{pi} - n_i'u_{pi}'h_i \tag{2-50}$$

上述结果表明，等式左端表述的是折射前的光线参量组合，而右端表述的是折射后同样的光线参数组合，二者相等说明它是一个不变量，我们暂且仍用J简示，但现在尚未证明它与光学（拉赫）不变量的关系。

近轴球面系统的放大率

式(2-50)所述的结果推广到整个光学系统中去。设第i面折射面与第i+1面折射面间的轴向间隔为，椐转面公式(2-35)和(2-36)，

有
$$n_{i+1}u_{i+1}u'_{pi} = n_{i+1}u_{pi+1}u'_i$$

也就是说有
$$n_{i+1}u_{i+1}d_i u'_{pi} - n_{i+1}u_{pi+1}du'_i = 0$$

进而有

$$n'_i u'_i h_{pi} - n'_i u'_{pi} h_i = n_{i+1}u_{i+1}h_{pi} - n_{i+1}u_{pi+1}h_i$$

$$= n_{i+1}u_{i+1}h_{pi} - n_{i+1}u_{pi+1}h_i - n_{i+1}u_{i+1}d_i u'_{pi} + n_{i+1}u_{pi+1}du'_i$$

$$= n_{i+1}u_{i+1}h_{pi+1} - n_{i+1}u_{pi+1}h_{i+1}$$

$$= J \qquad (2\text{-}51)$$

4、实像，虚像；实物，虚物；物空间，像空间

(1). 实像，虚像

例如由一个近轴球面构成的简单系统，其物方折射率为1，即物方媒质为空气；像方为普通光学玻璃，折射率为1.5。近轴球面半径为+100mm。利用式(2-9)对于两个不同的物体位置计算出像的位置如下：

已知(A)

r	n
	1
100	
	1.5

实像，虚像；实物，虚物；物空间，像空间

已知(B) $l_B = -800mm$

已知(C) $l_C = -50mm$

应用式(2-9)，即 $\frac{n'}{l'} = \frac{n}{l} + \frac{n'-n}{r}$

代入已知(A)和(B)中的相关数椐有 $\frac{1.5}{l'_B} = \frac{1}{-800} + \frac{1.5-1}{100} = 0.00375$

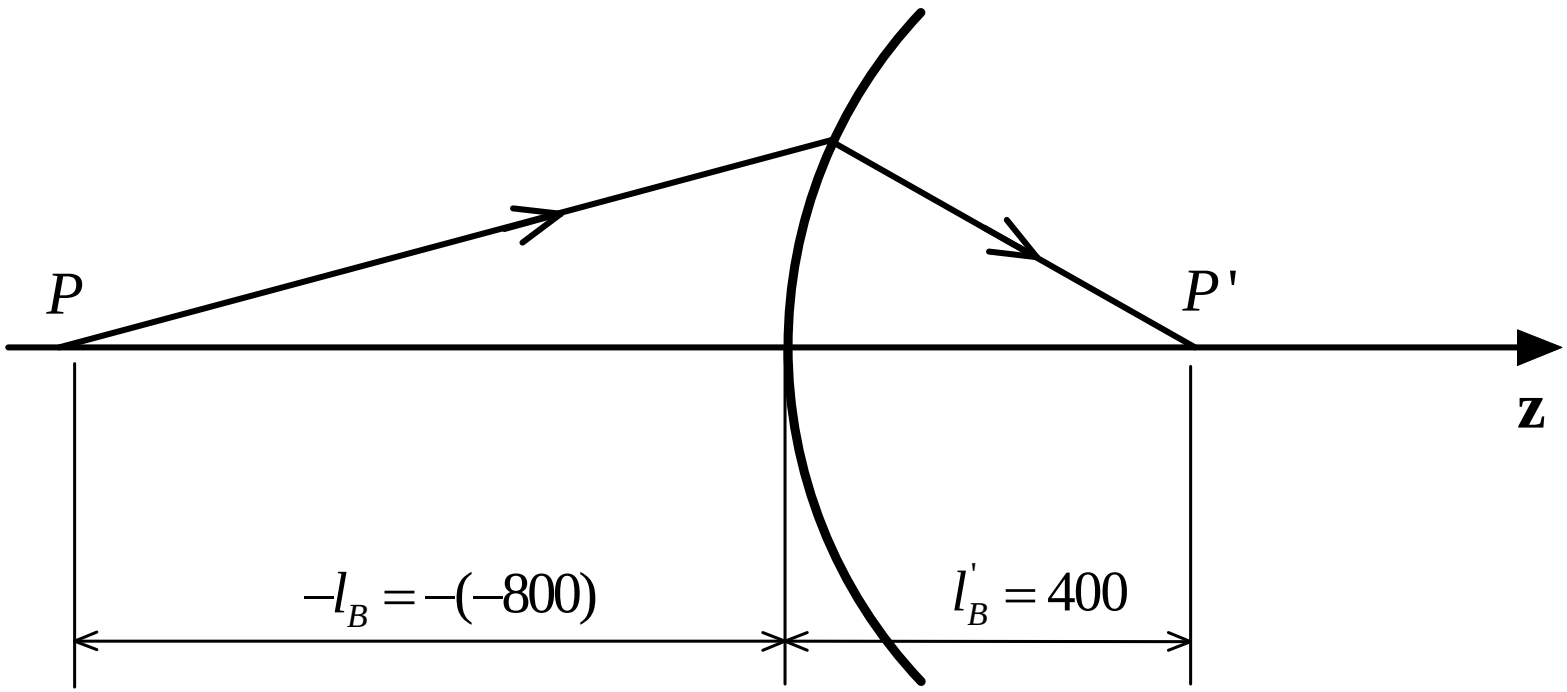
即得 $l'_B = 400$

在式(2-9)中代入(A)和(C)的相关数椐，有

$$\frac{1.5}{l'_C} = \frac{1}{-50} + \frac{1.5-1}{100} = -0.015$$

$$l'_C = -100$$

实像，虚像；实物，虚物；物空间，像空间



(a)

图2-13(a)　不同物距的成像

实像，虚像；实物，虚物；物空间，像空间

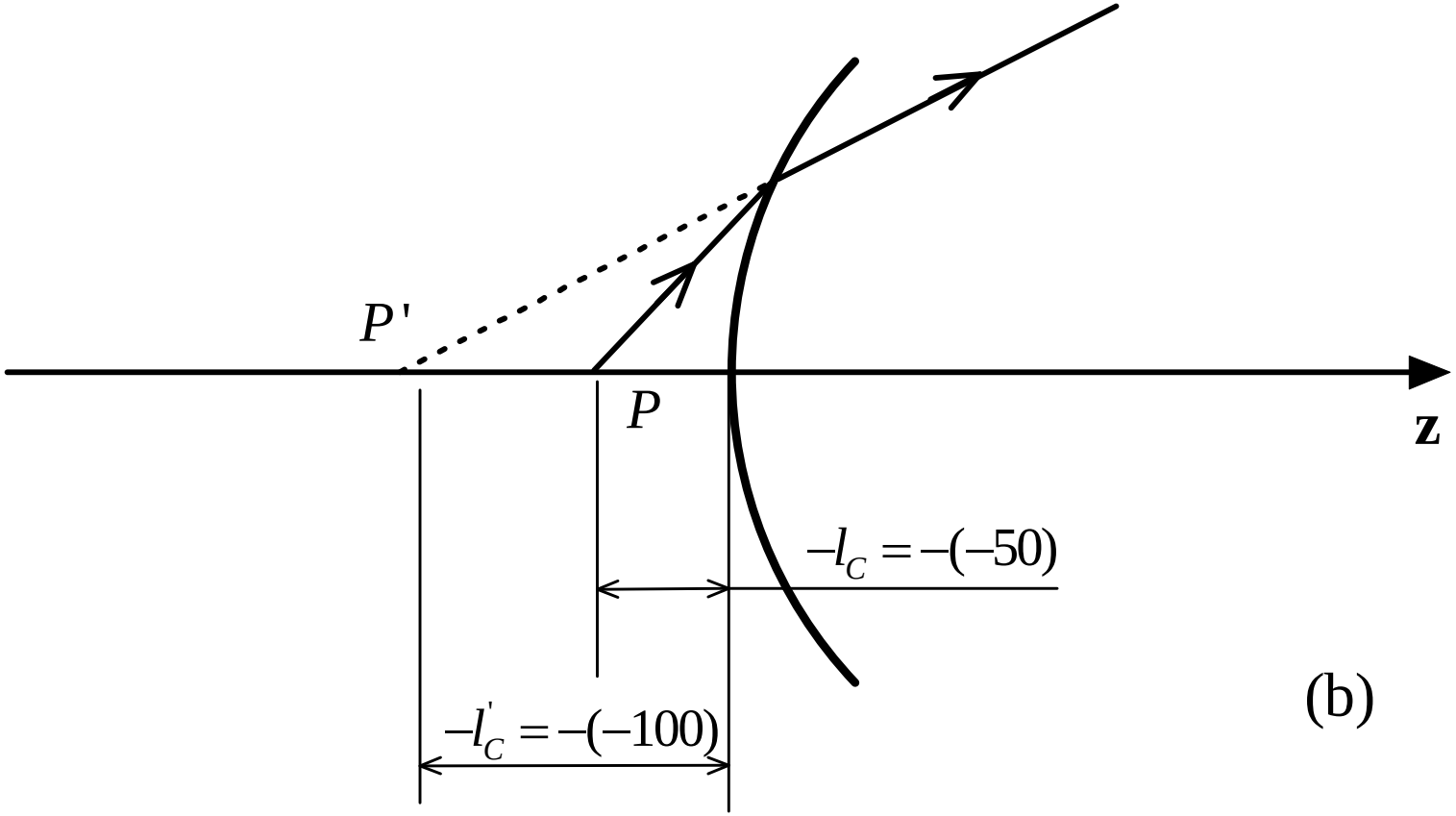


图2-13(b)　不同物距的成像

实像，虚像；实物，虚物；物空间，像空间

(2). 实物，虚物

如上例，对于给定的单面系统来说，物点是一个实实在在的物点，说它实在是指联系物点和像点的入射光线就是该物点发出的实际光线，所以这个物点称为实物。在前一种物距情况下，成了一个实像；而在后一种物距情况下成了一个虚像。现假如该系统之后还有一个折射面，其设置如下：

r	d	n
		1.0
100		
	30	1.5
-200		
		1.0

实像，虚像；实物，虚物；物空间，像空间

现针对第一种物距，即 $l_1 = -800mm$ 作光线追踪计算：

i. 由前面计算知，此物点发出的近轴光线经第一面折射后交光轴于近轴球面顶点后 $400mm$ 处，即 $l' = 400mm$；

ii. 第一面成的像即作为第二面的物再作计算，先进行转面计算，即

$$l_2 = l_1' - d_1 = 400 - 30 = 370(mm)$$

iii. 经第二面成像的计算，再利用式(2-9)有

即

$$\frac{1}{l_2'} = \frac{1.5}{370} + \frac{1-1.5}{-200} = 0.0066$$

$$l_2' = 152.6(mm)$$

实像，虚像；实物，虚物；物空间，像空间

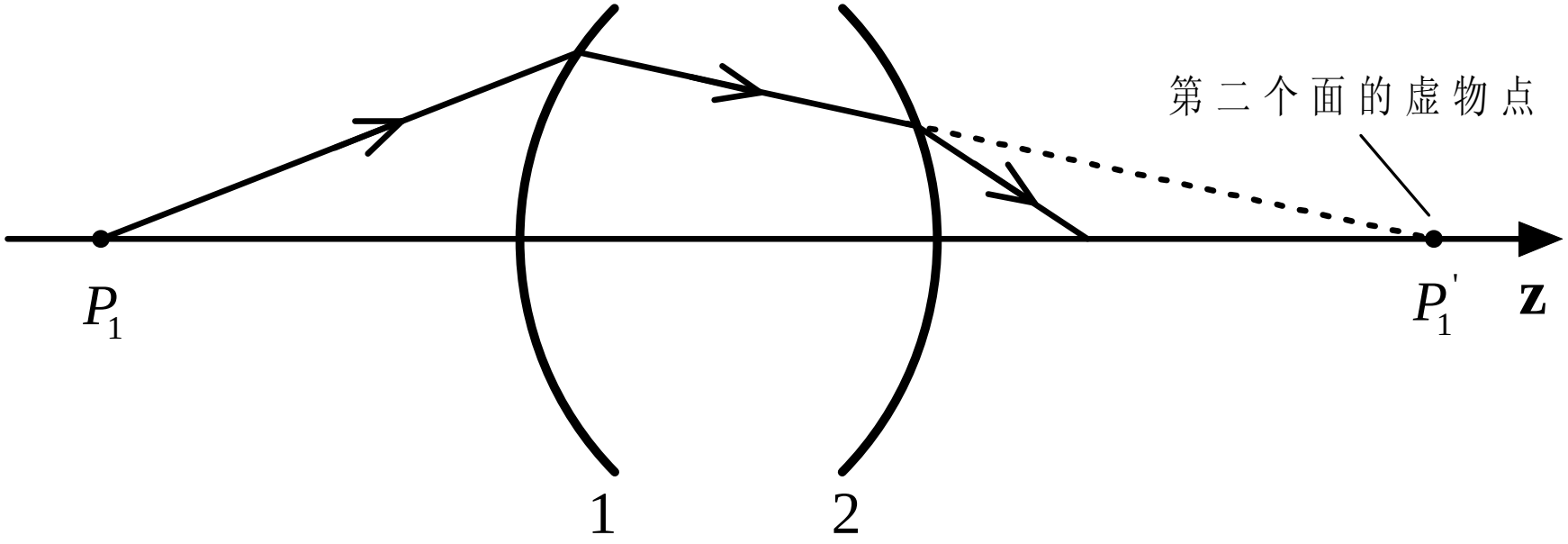


图2-14　第二面的物是虚物

实像，虚像；实物，虚物；物空间，像空间

(3). 物空间，像空间

任何具有一定面积或体积的物体，都可以把它们看作是由无数发光点集合而成。如果每一点都按照上述光线追踪的办法定义一像点，物体上各点所对应的像点的总体就叫该物体通过光学系统所成的像。物所在的空间称为“物空间”，像所在的空间称为“像空间”。由此可以定义，光学系统第一面以前的空间为“实物空间”，而第一面以后的空间为“虚物空间”；系统最后一面以后的空间称为“实像空间”，而最后一面以前的空间称为“虚像空间”。整个物空间（包括实物空间和虚物空间）是可以无限扩展的，整个像空间（包括实像空间和虚像空间）也是可以无限扩展的。

2.5
矩阵光学

1、近轴光线的列矩阵表示

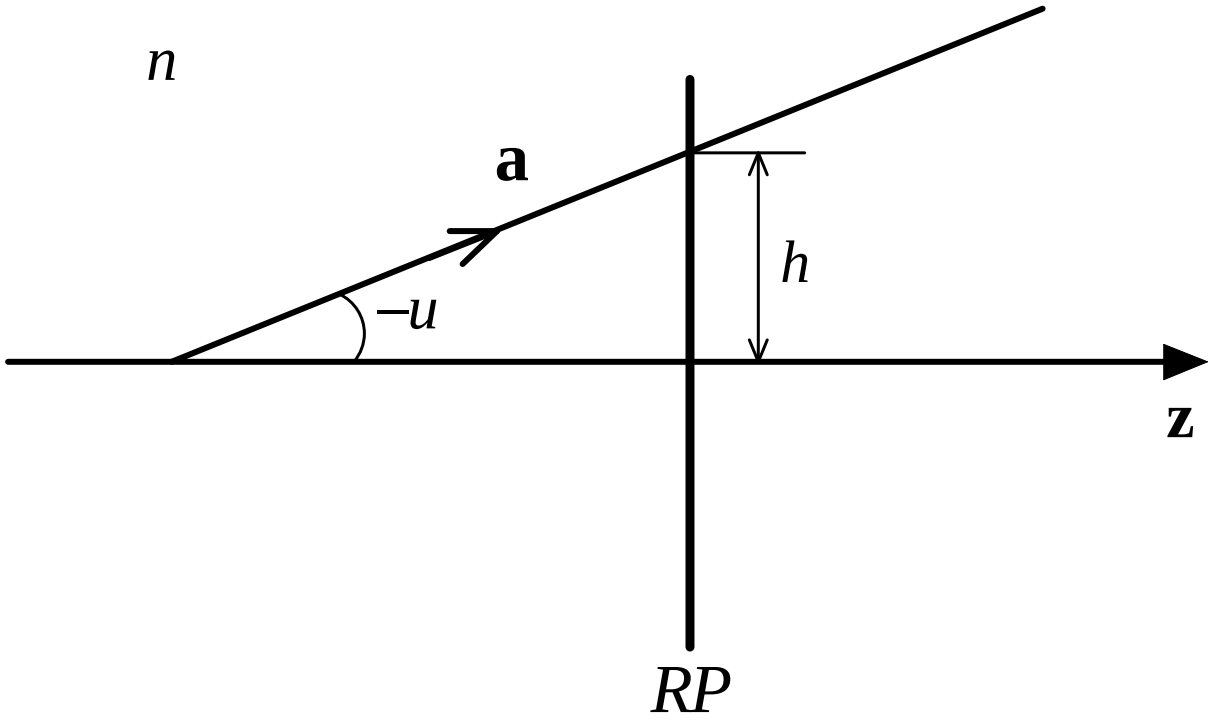
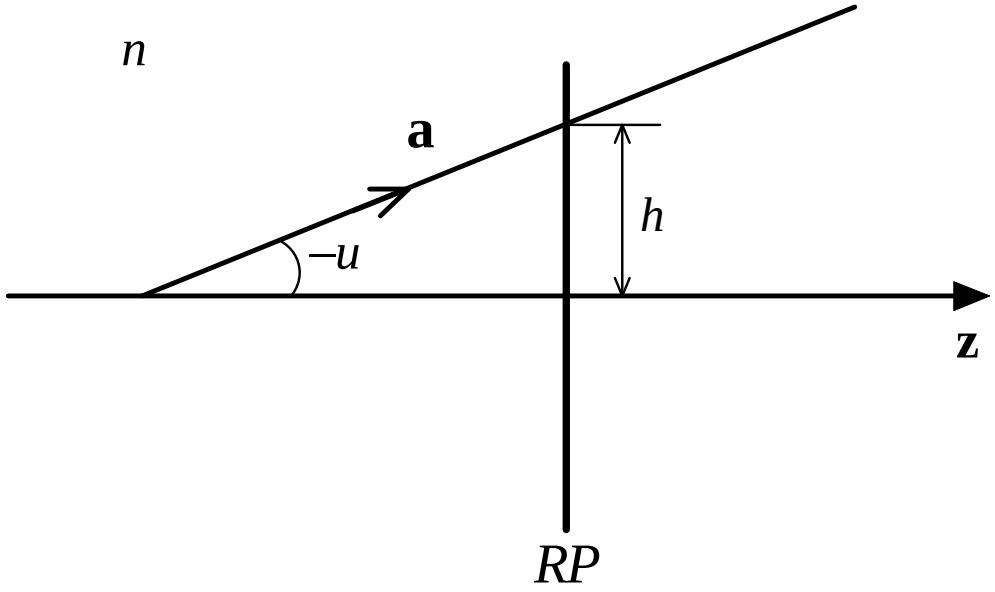


图2-15 近轴光线的标示

近轴光线的列矩阵表示

含光轴面(纸面)内的任一近轴光线可用该光线在参考面上的投射高度h，以及它与光轴的夹角 u（即孔径角）这两个参数来表示。又为了表明该光线所在的媒质折射率n ，将n与u的乘积nu作为一个参数，称谓光学方向余弦。这样，图2-15中的光线可用列矩阵$\mathbf{a}$ 表示，即

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} h \\ nu \end{bmatrix} \tag{2-52}$$



2、近轴光线的折射矩阵

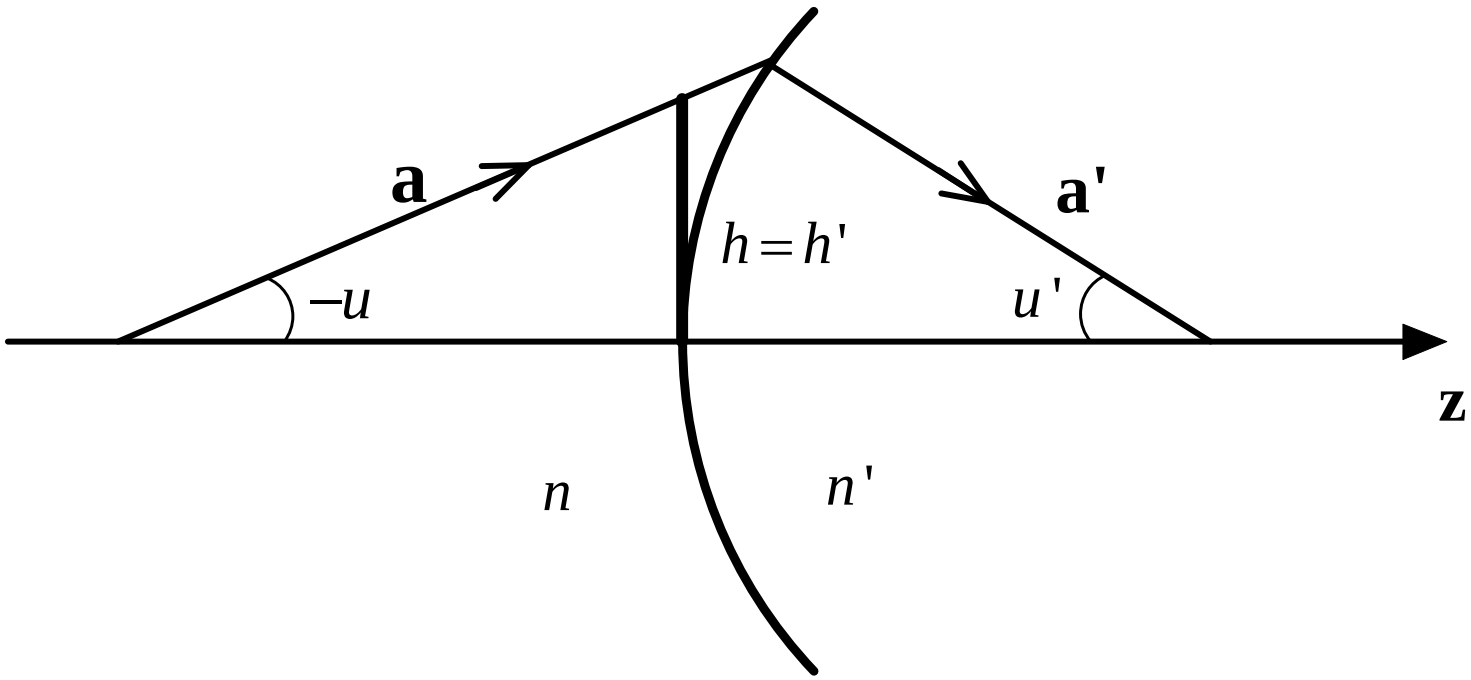


图2-16　近轴球面对近轴光线的折射

近轴光线的折射矩阵

如图2-16所示是一个近轴折射球面，两边媒质的折射率分别为n和n’，近轴球面半径为r。近轴光线 $\mathbf{a}=\begin{bmatrix} h \\ nu \end{bmatrix}$ 入射到这个近轴球面上，经其折射成为折射光线 $\mathbf{a}'=\begin{bmatrix} h' \\ n'u' \end{bmatrix}$ 。

将参考面取在过近轴球面顶点的切平面上，由近轴光线的性质知，如下关系成立

$$h' = h \tag{2-53}$$

由式(2-11)知，近轴光线在近轴球面上折射前后满足关系

$$n'u' = \frac{n'-n}{r}h + nu \tag{2-11}$$

近轴光线的折射矩阵

将(2-53)和(2-11)两式联立并写成矩阵形式有

$$\begin{bmatrix} h' \\ n'u' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{n'-n}{r} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ nu \end{bmatrix} \tag{2-54}$$

式(2-54)中的2×2 方阵只含有近轴球面系统的参量。称其为近轴光线的*折射矩阵*，用 $\mathbf{R}$ 简记之，即

$$\mathbf{R} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{n'-n}{r} & 1 \end{bmatrix} \tag{2-55}$$

3、近轴光线的转面矩阵

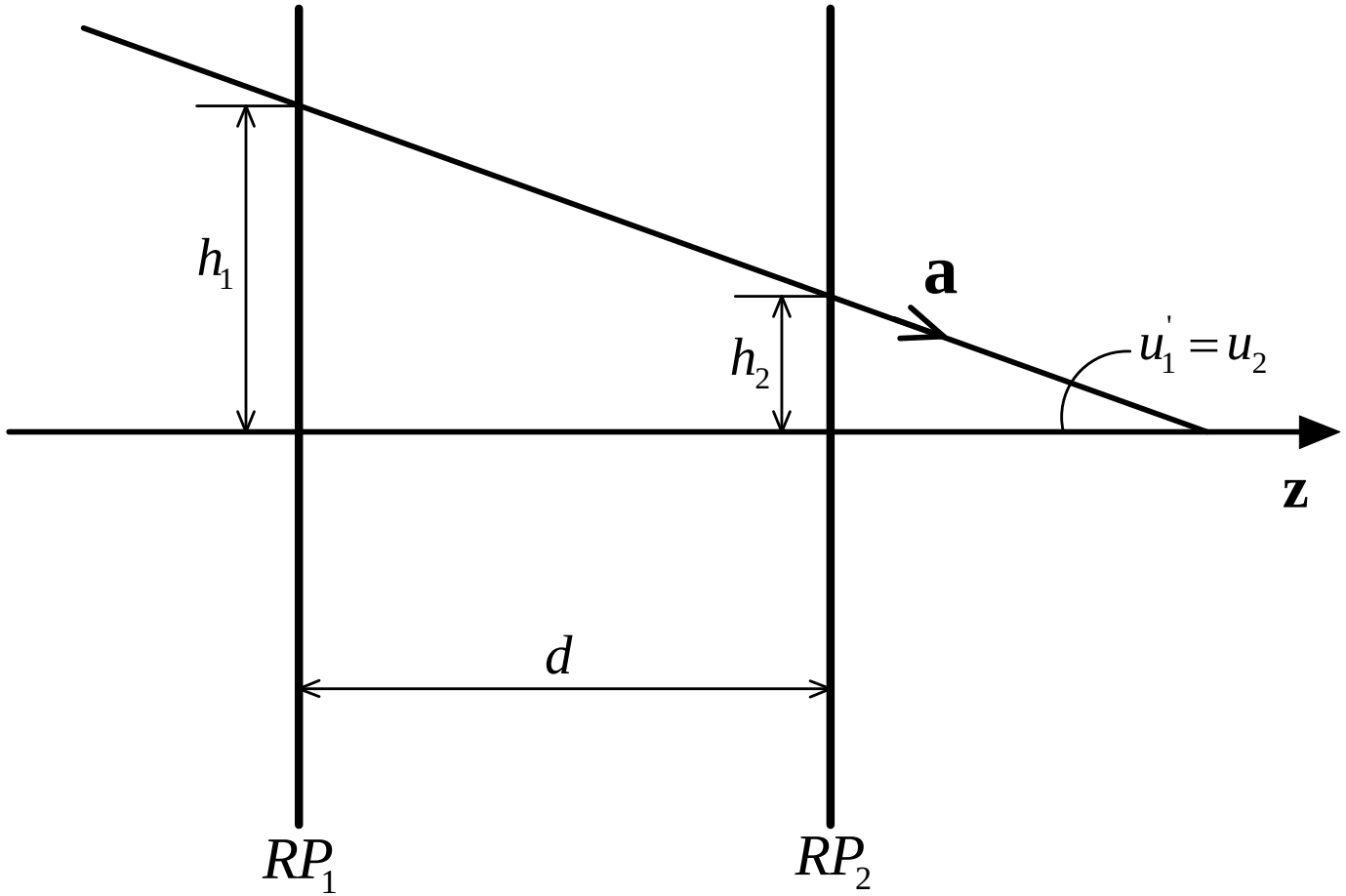


图2-17　近轴光线后的转面

近轴光线的转面矩阵

光线**a** 无论在参考面 RP_1 上描述还是在参考面 RP_2 上描述，它都是同一条光线，所以有 $u_1' = u_2$ 。利用近轴光学中的转面关系式 $h_2 = h_1 - d_1 u_1'$ ，$u_2 = u_1'$ 和 $n_2 = n_1'$ ，有

$$\begin{cases} h_2 = h_1 - \dfrac{d_1}{n_1'} n_1' u_1' \\ n_2 u_2 = 0 + n_1' u_1' \end{cases} \tag{2-57}$$

式(2-57)写成矩阵形式有

$$\begin{bmatrix} h_2 \\ n_2 u_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{d_1}{n_1'} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ n_1' u_1' \end{bmatrix} \tag{2-58}$$

式(2-58)是近轴光线的转面关系式。

近轴光线的转面矩阵

很清楚，列矩阵 $\begin{bmatrix} h_1 \\ n_1'u_1' \end{bmatrix}$ 与列矩阵 $\begin{bmatrix} h_2 \\ n_2u_2 \end{bmatrix}$ 之间的关系由矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{d_1}{n_1'} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 完全确定，称这个 2×2 的矩阵为近轴光线的*转面矩阵*，用 $\mathbf{T}$ 表示，即

$$\mathbf{T} = \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{d_1}{n_1'} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \tag{2-59}$$

很容易看出，转面矩阵行列式的值为1，即

$$|\mathbf{T}| = 1 \tag{2-60}$$

4、近轴球面系统的特性矩阵

设一近轴光学系统由K个折射面组成，它就有(K-1)个间隔（厚度）

如此可写出个K折射矩阵 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{n_i' - n_i}{r_i} & 1 \end{bmatrix}$(其中 $i = 1, \cdots, K$) K-1 个转面矩

阵 $\begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{d_i}{n_i'} \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ (其中 $i = 1, \cdots, K-1$)。入射光线 $\begin{bmatrix} h_1 \\ n_1 u_1 \end{bmatrix}$ 经这个系统的逐

面依次折射，并考虑到前一面到后一面的转面关系，我们自然得

到出射光线 $\begin{bmatrix} h_K' \\ n_K' u_K' \end{bmatrix}$ 为

$$\begin{bmatrix} h_K' \\ n_K' u_K' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{n_K' - n_K}{r_K} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{d_{K-1}}{n_{K-1}'} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdots\cdots \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{d_1}{n_1'} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{n_1' - n_1}{r_1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ n_1 u_1 \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}61)$$

近轴球面系统的特性矩阵

简记上式中2K-1个方阵的乘积为M，即

$$\mathbf{M}=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \dfrac{n'_K-n_K}{r_K} & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & -\dfrac{d_{K-1}}{n'_{K-1}}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\cdots\cdots\begin{bmatrix}1 & \dfrac{d_1}{n'_1}\\ 0 & 1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 & 0\\ \dfrac{n'_1-n_1}{r_1} & 1\end{bmatrix} \tag{2-62}$$

这个矩阵中只含有光学系统的参数，称为光学系统的*特性矩阵*。由式(2-56)和式(2-60)知，上式右端中的每一个矩阵的行列式之值都为1。根椐代数学中的一个定理，即“矩阵乘积行列式之值等于各矩阵行列式的乘积”，可得光学系统特性矩阵行列式的值亦为1，也就是说有

$$|\mathbf{M}|=1 \tag{2-63}$$

5、近轴矩阵光学的应用——激光稳定谐振腔的设计

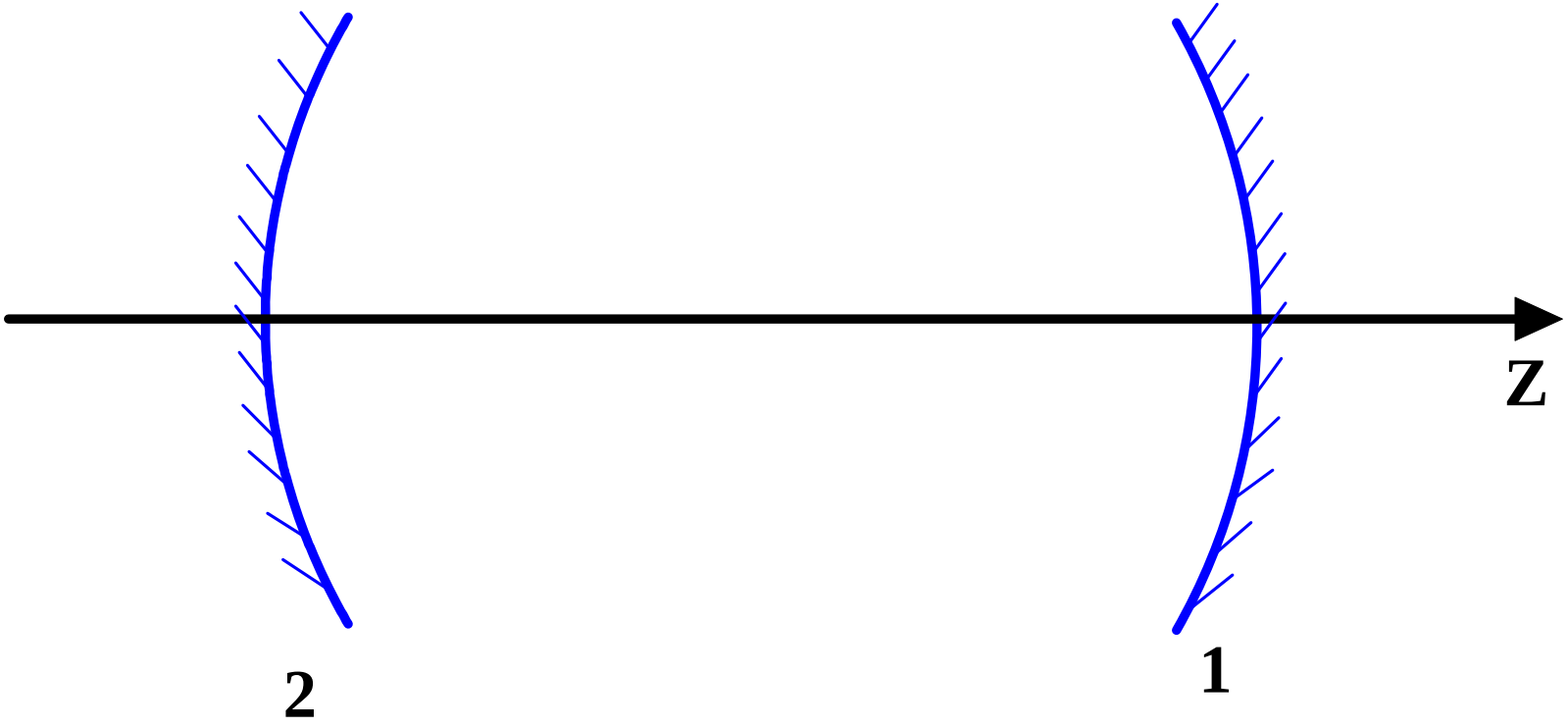


图2-18　激光谐振腔（空腔）

近轴矩阵光学的应用—激光稳定谐振腔的设计

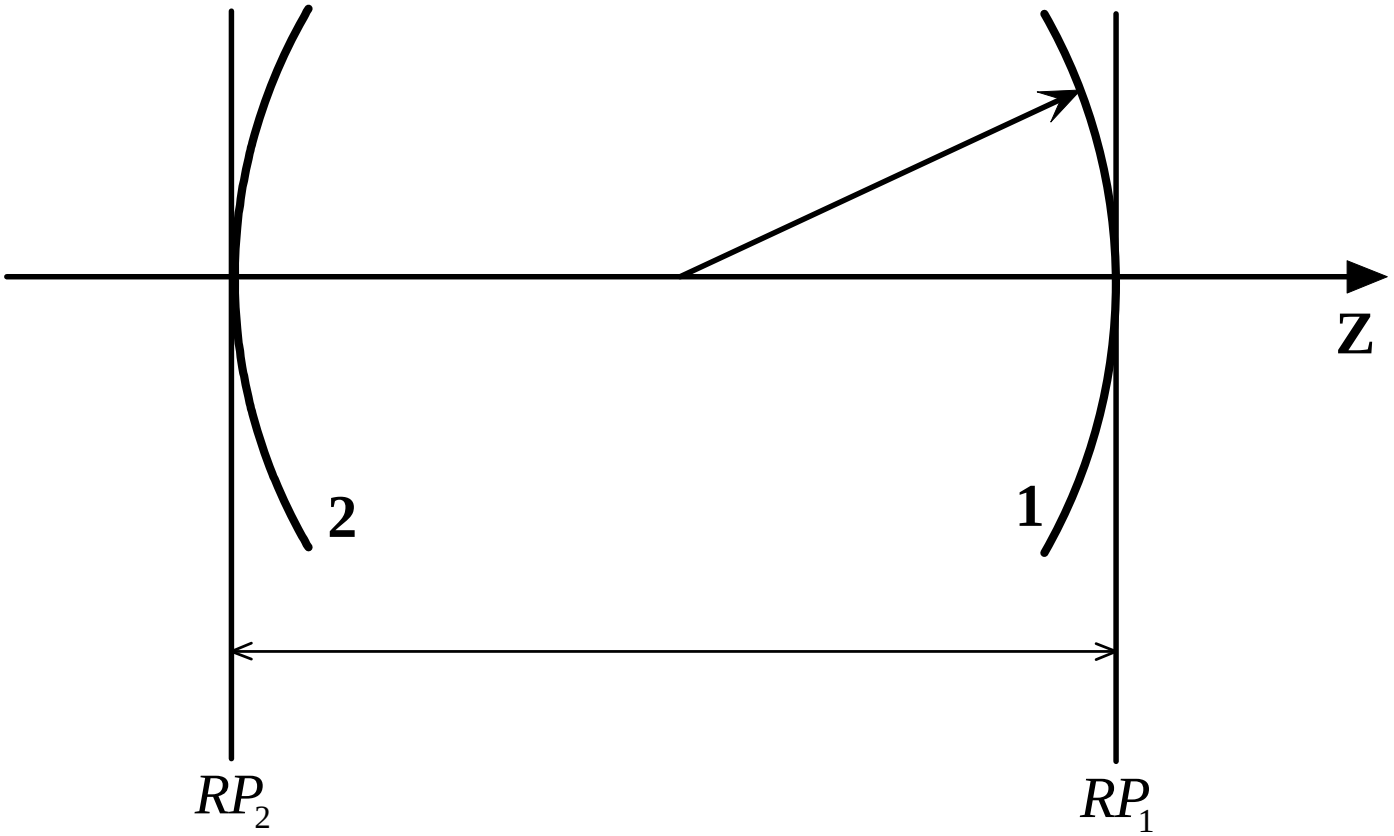


图2-19　激光谐振腔中的参考面

近轴矩阵光学的应用—激光稳定谐振腔的设计

由式(2-55)知，反射镜1和2的反射矩阵分别为

$$\mathbf{R}_1=\begin{bmatrix}1 & 0\\ -\dfrac{2}{r_1} & 1\end{bmatrix} \quad (2\text{-}64) \quad 和 \quad \mathbf{R}_2=\begin{bmatrix}1 & 0\\ \dfrac{2}{r_2} & 1\end{bmatrix} \quad (2\text{-}65)$$

同样，利用两个替代原则，由式（2-59）可得从 RP_1 到 RP_2 和

从 RP_2 到 RP_1 的转面矩阵分别为

$$\mathbf{T}_1=\begin{bmatrix}1 & -\dfrac{d_1}{n_1'}\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -d\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad (2\text{-}66)$$

和

$$\mathbf{T}_2=\begin{bmatrix}1 & -\dfrac{d_2}{n_2'}\\ 0 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & -d\\ 0 & 1\end{bmatrix} \quad (2\text{-}67)$$

近轴矩阵光学的应用—激光稳定谐振腔的设计

所以谐振腔的特性矩阵M为

$$\mathbf{M}=\mathbf{T}_2\mathbf{R}_2\mathbf{T}_1\mathbf{R}_1=\begin{bmatrix} m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & m_{22} \end{bmatrix} \tag{2-68}$$

设特性矩阵M的两个特征值分别为λ_1和λ_2，属于λ_1的特征向量为$\mathbf{a_1}$，属于λ_2的特征向量为$\mathbf{a_2}$，即有

$$\mathbf{M}\mathbf{a}_1=\lambda_1\mathbf{a}_1 \tag{2-69}$$

和

$$\mathbf{M}\mathbf{a}_2=\lambda_2\mathbf{a}_2 \tag{2-70}$$

现将近轴光线a表示成两个特征向量的线性组合，即

$$\mathbf{a}=c_1\mathbf{a}_1+c_2\mathbf{a}_2$$

其中，c_1和c_2是可以调整的系数。则有

近轴矩阵光学的应用—激光稳定谐振腔的设计

$$\mathbf{Ma} = \mathbf{M}(c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2)$$

$$= c_1\mathbf{Ma}_1 + c_2\mathbf{Ma}_2 = c_1\lambda_1\mathbf{a}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{a}_2 \qquad (2\text{-}71)$$

和

$$\mathbf{M}^2\mathbf{a} = \mathbf{M}(\mathbf{Ma}) = \mathbf{M}(c_1\lambda_1\mathbf{a}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{a}_2)$$

$$= c_1\lambda_1\mathbf{Ma}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{Ma}_2 = c_1\lambda_1{}^2\mathbf{a}_1 + c_2\lambda_2{}^2\mathbf{a}_2 \qquad (2\text{-}72)$$

以及

$$\mathbf{M}^N\mathbf{a} = c_1\lambda_1{}^N\mathbf{a}_1 + c_2\lambda_2{}^N\mathbf{a}_2 \qquad (2\text{-}73)$$

近轴矩阵光学的应用—激光稳定谐振腔的设计

所以若欲将来回反射的光线保持在腔内而不从腔的侧面跑出去，则始终要求光线的投射高度h是有限的，故必须有

$$|\lambda_1| \le 1 \qquad (2\text{-}74)$$ 和 $$|\lambda_2| \le 1 \qquad (2\text{-}75)$$

只有这样，所有 $\mathbf{M}^N\mathbf{a}$ 的可保持在距离光轴的有限范围内，因而才能建立稳定振荡。由线性代数知，谐振腔特性矩阵M的特征值 λ 是久期方程

$$Det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{M}) = 0 \qquad (2\text{-}76)$$

的两个根。上式中 $\mathbf{I}$ 是单位矩阵。将式(2-68)代入，有

$$Det(\lambda\mathbf{I} - \mathbf{M}) = \begin{vmatrix} \lambda - m_{11} & m_{12} \\ m_{21} & \lambda - m_{22} \end{vmatrix} \qquad (2\text{-}77)$$

$$= \lambda^2 - (m_{11} + m_{22})\lambda + (m_{11}m_{22} - m_{12}m_{21}) = 0$$

近轴矩阵光学的应用—激光稳定谐振腔的设计

根据式(2-63)和式(2-68)知，上述运算第二步中的第三项为1。并在式(2-68)中代入式(2-64)、(2-65)、(2-66)和(2-67)得

$$m_{11}+m_{22}=2+\frac{4d}{r_1}-\frac{4d}{r_2}-\frac{4d^2}{r_1r_2}=-2+4(1+\frac{d}{r_1})(1-\frac{d}{r_2}) \qquad (2\text{-}78)$$

根据初等方程论知，久期方程(2-77)两根之和（$\lambda_1+\lambda_2$）为

$$\lambda_1+\lambda_2=m_{11}+m_{22}=-2+4(1+\frac{d}{r_1})(1-\frac{d}{r_2}) \qquad (2\text{-}79)$$

由式(2-74)和(2-75)得

$$-2\le\lambda_1+\lambda_2\le 2$$

将式(2-79)代入并整理后有

$$\boxed{0\le(1+\frac{d}{r_1})(1-\frac{d}{r_2})\le 1} \qquad (2\text{-}80)$$

式(2-80)就是近轴光线连续在腔内反射而不从腔的侧面逸出腔外所必须满足的条件，亦即稳定腔的结构所必须满足的条件。

6、近轴矩阵光学的应用—近轴光线线性相关性的分析

设近轴光线$\begin{bmatrix} h \\ nu \end{bmatrix}$和近轴光线$\begin{bmatrix} h_p \\ nu_p \end{bmatrix}$是在光学系统的参考面1上标定的两条入射光线，如果这两条近轴光线相互间不能线性表出，则只有当$\zeta = \eta = 0$时下式才成立

$$\zeta \begin{bmatrix} h \\ nu \end{bmatrix} + \eta \begin{bmatrix} h_p \\ nu_p \end{bmatrix} = 0 \tag{2-81}$$

式(2-81)是一个关于ζ 和η 的齐次线性方程组，若有唯一的零解，椐克莱默法则知其系数行列式之值一定不为零，所以要求

$$\begin{vmatrix} h & h_p \\ nu & nu_p \end{vmatrix} \neq 0 \tag{2-82}$$

近轴矩阵光学的应用—近轴光线线性相关性的分析

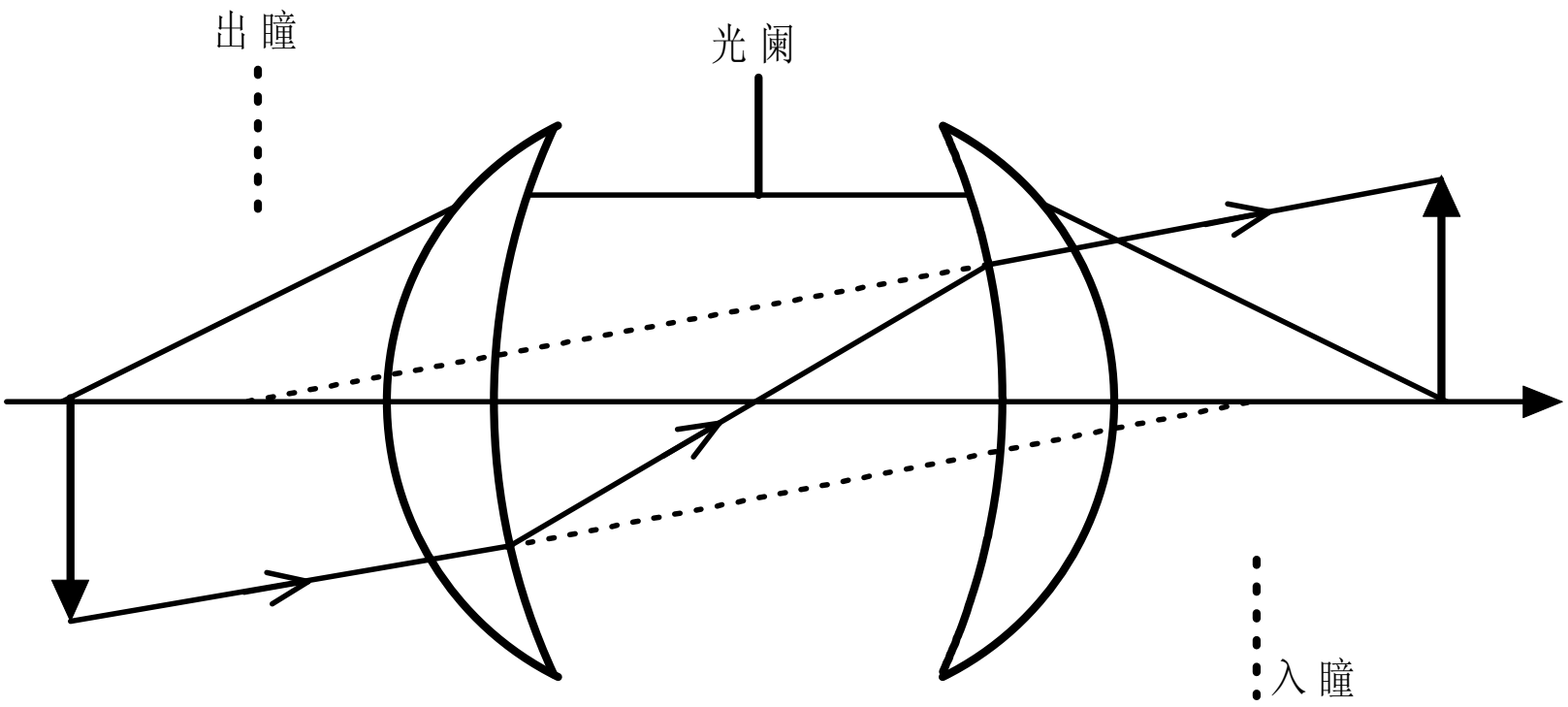


图2-20　光学系统的光阑，入瞳与出瞳（夸大了的）

近轴矩阵光学的应用—近轴光线线性相关性的分析

设 $\begin{bmatrix} h_* \\ nu_* \end{bmatrix}$ 是物面上某点发出且入射到光学系统上的任意一条近轴光线，看看是否能够找到唯一的 ζ、η 使下式成立

$$\begin{bmatrix} h_* \\ nu_* \end{bmatrix} = \zeta \begin{bmatrix} h \\ nu \end{bmatrix} + \eta \begin{bmatrix} h_p \\ nu_p \end{bmatrix} \tag{2-83}$$

式(2-83)是一个关于(ζ, η)的非齐次线性方程组，椐式(2-82)知，它的系数行列式一定不为零，所以有唯一解。

椐式(2-61)并将式(2-83)代入，在任何一个参考面i上就有

$$\begin{bmatrix} h'_{*i} \\ n'_i u'_{*i} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{n'_i - n_i}{r_i} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{d_{i-1}}{n'_i} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{n'_1 - n_1}{r_1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_* \\ n_1 u_* \end{bmatrix}$$

近轴矩阵光学的应用—近轴光线线性相关性的分析

$$
= \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{n_i' - n_i}{r_i} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{d_{i-1}}{n_i'} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{n_1' - n_1}{r_1} & 1 \end{bmatrix} \left(\zeta \begin{bmatrix} h \\ n_1 u \end{bmatrix} + \eta \begin{bmatrix} h_p \\ n_1 u_p \end{bmatrix} \right)
$$

$$
= \zeta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{n_i' - n_i}{r_i} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{d_{i-1}}{n_i'} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{n_1' - n_1}{r_1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h \\ n_1 u \end{bmatrix}
$$

$$
+ \eta \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{n_i' - n_i}{r_i} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -\dfrac{d_{i-1}}{n_i'} \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdots \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \dfrac{n_1' - n_1}{r_1} & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_p \\ n_1 u_p \end{bmatrix}
$$

$$
= \zeta \begin{bmatrix} h_i' \\ n_i' u_i' \end{bmatrix} + \eta \begin{bmatrix} h_{pi}' \\ n_i' u_{pi}' \end{bmatrix} \qquad (2\text{-}84)
$$

近轴矩阵光学的应用—近轴光线线性相关性的分析

对于给定的光学系统，当我们计算了轴上物点满孔经光线 $\begin{bmatrix} h \\ nu \end{bmatrix}$ 和轴外点主光线 $\begin{bmatrix} h_p \\ nu_p \end{bmatrix}$ 后，这两条光线在每一个参考面上的数据就都知道了，那么任意第三条光线 $\begin{bmatrix} h_* \\ nu_* \end{bmatrix}$ 就不必再作逐面追迹计算，利用式(2-84)并利用已有的轴上点满孔径光线和轴外点主光线数据就可得出关于第三条光线的结果数据。这是这一部分讨论所得到的重要结论。